Тема IV

Алгебраические решётки

Разделы

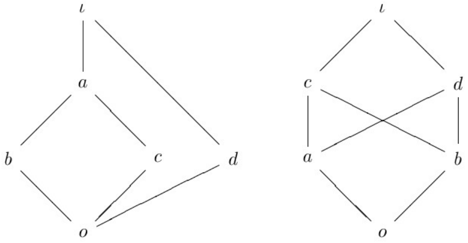
Решёточно упорядоченное множество

Определение

Ч.у. множество, в котором для любых элементов a и b существуют $\inf\{a, b\}$ и $\sup\{a, b\}$ называют *решёточно упорядоченным*.

Решётка называется *полной*, если любое подмножество её элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

Решётка и не-решётка —



Алгебраические решётки: определение

Определение

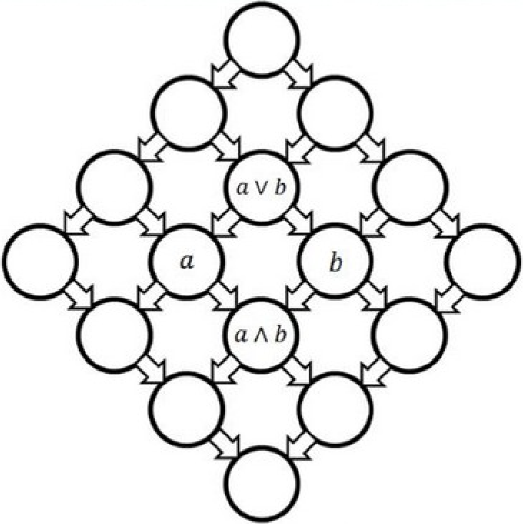
Алгебраическая решётка — это тройка $\mathfrak{L} = \langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$, где L — непустое множество, а $\sqcup$ (*объединение*), $\sqcap$ (*пересечение*) — бинарные операции на нём, подчиняющимися парам законов коммутативности, ассоциативности, идемпотентности и поглощения:

$$x \sqcup y = y \sqcup x; \qquad x \sqcap y = y \sqcap x;$$
$$x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z; \qquad x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z;$$
$$x \sqcup x = x; \qquad x \sqcap x = x,$$
$$x \sqcap (x \sqcup y) = x; \qquad x \sqcup (x \sqcap y) = x.$$

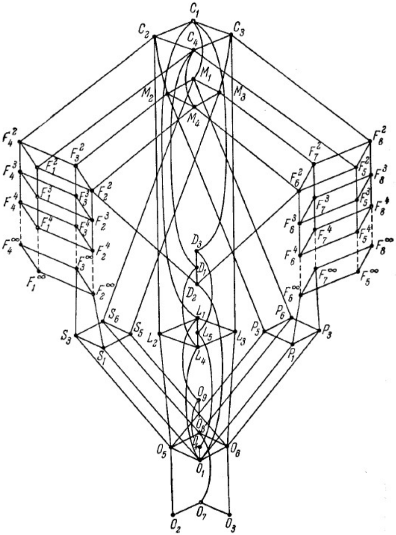
Принцип двойственности для решёток

Любое утверждение, истинное для любых произвольных элементов решётки, остаётся таковым при замене $\sqcap \leftrightarrow \sqcup$.

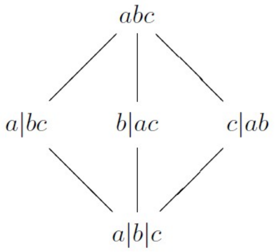
Структура решётки

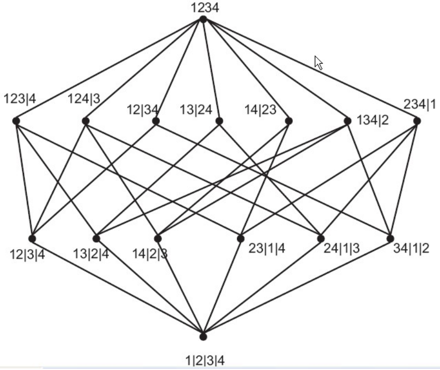


Структура замкнутых классов Поста



Решётка Π_n всех разбиений n-множества — беллиан





$\left|\Pi_n\right| = B(n)$ — количество всевозможных эквивалентностей n-элементном множестве, *число Белла*.

$$B(3) = 5,\ B(4) = 15,\ \dots,\ B(20) = 51724158235372,\ \dots.$$

Числа Стирлинга второго рода

Числом Стирлинга второго рода $S(n,k)$ для $n,k \geqslant 1$ называется число разбиений n-элементного множества на k блоков. Полагают $S(n,k)=0$ при $n<k$, $S(n,0)=0$ при $n \neq 0$ и $S(0,k)=0$, $n,k \in \mathbb{N}_0$.

Ясно, что в решётке Π_n будет $W_k = S(n,k)$ и

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k).$$

$$S(n,k) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} S(i,k-1) \quad (\text{для } k \geqslant 2).$$

Числа $S(n,k)$ быстро растут: например, $S(10,5) = 42\,525$.

Решётка Π_n как ч.у. множество обладает LYM-свойством только при $n<20$, а при больших n теряет и свойство Шпернера.

Эквивалентность решёточно упорядоченных множеств и решёток

Теорема

1. *Пусть* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *— решёточно упорядоченное множество. Если для любых элементов* x *и* y *из* P *положить*
$$x \sqcup y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}, \qquad x \sqcap y \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x, y\},$$
то структура $\langle P, \sqcup, \sqcap \rangle$ *будет решёткой.*

2. *Пусть* $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ *— решётка. Если для любых элементов* x *и* y *из* L *положить*
$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \sqcap y = x \quad (\textbf{\textit{или}}\ \ x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def}}{=} x \sqcup y = y),$$
то структура $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ *будет решёточно упорядоченным множеством.*

Эквивалентность решёточно упорядоченных множеств и решёток...

Теорема устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решёточно упорядоченными множествами и решётками: из одной АС всегда можно получить другую.

Поэтому термин «решётка» применяют для обоих понятий: любую решётку можно представить либо как упорядоченное множество, либо как алгебру.

решёточно упорядоченные множества	решётки
$\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$	$\langle \mathbb{R}, \max, \min \rangle$
$\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$	$\langle \mathbb{N}, \text{НОК}, \text{НОД} \rangle$
$\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$	$\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap \rangle$

Возможность такого рассмотрения решёток позволяет вводить в них как порядковые, так и алгебраические операции, что приводит к богатой и многообразной в приложениях теории.

Решётки: универсальные грани и атомы

Наименьший элемент решётки (как р.у.м.) — её *ноль* (o), наибольший — *единица* (ι)
— это её *универсальные грани*.

Решётка может и не иметь универсальных граней: $\mathbb{Z}$, у $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ — только $o = 1$.

Все конечные решётки содержат o и ι.

Решётки: универсальные грани и атомы

Наименьший элемент решётки (как р.у.м.) — её *ноль* (o), наибольший — *единица* (ι)
— это её *универсальные грани*.

Решётка может и не иметь универсальных граней: $\mathbb{Z}$, у $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ — только $o = 1$.

Все конечные решётки содержат o и ι.

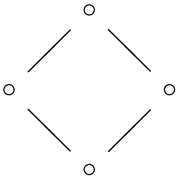
Определение

Если L — решётка с нулём o, то элемент $a \neq o$ называется её *атомом*, если для любого элемента x этой решётки пересечение $a \sqcap x$ равно либо o, либо a.
В последнем случае говорят, что *элемент x содержит атом a*.

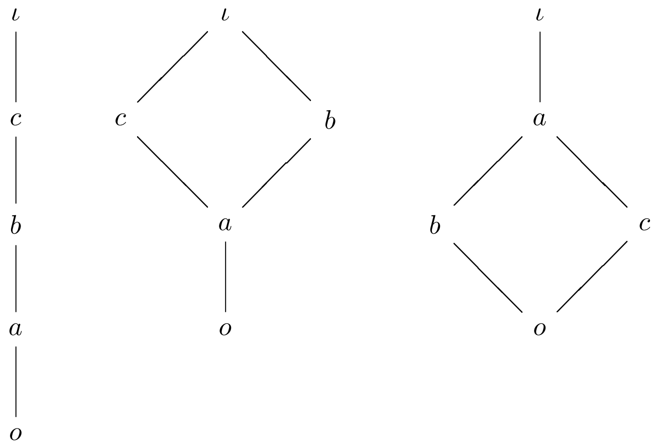
Решётки: примеры

Решётки:

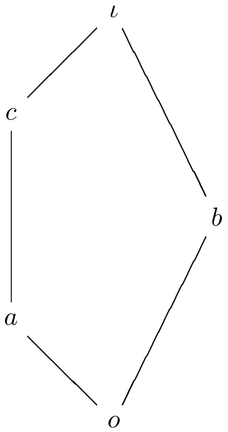
- все булевы алгебры;
- все цепи;
- единственные 1-, 2-, 3-элементные решётки — цепи $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$
- 4-элементные решётки — цепь $\mathbf{4}$ и B^2:

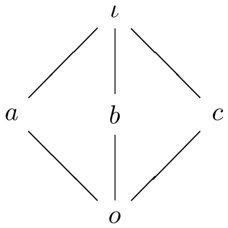


5-элементные решётки —

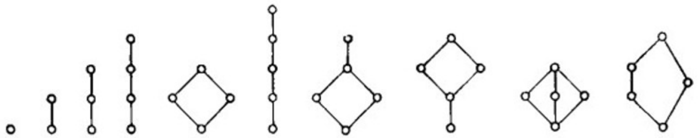


5-элементные решётки — *пятиугольник* N_5 и *бриллиант* M_3



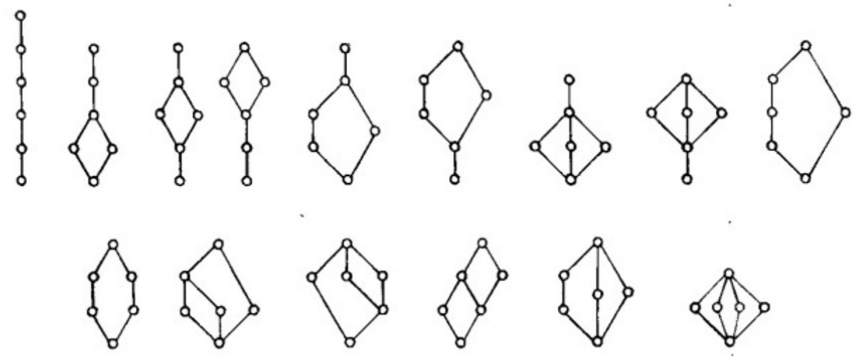


Все решётки, содержащие не более 5 элементов



Все решётки, содержащие 6 элементов

— 15 шт.:



Условие для ч.у. множества являться полной решёткой

Теорема

Частично упорядоченное множество является полной решёткой, если и только если

1. *оно имеет наибольший элемент* ι*;*
2. *для любого его непустого подмножества* A *существует точная нижняя грань* $\inf A$*.*

Доказательство

$(\Leftarrow)$ *Пусть* $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ *— полная решётка.*
Тогда каждое непустое подмножество $A \subseteq P$ *имеет и точную нижнюю грань* $\inf A$*, и точную верхнюю грань* $\sup A$*.*
В частности, существует $\sup P = \iota$*.*

Условие для ч.у. множества являться полной решёткой...

Доказательство (продолжение)

($\Rightarrow$) *Покажем, что в условиях теоремы каждое непустое подмножество* $A \subseteq P$ *имеет точную верхнюю грань.*
Рассмотрим $A^{\triangle}$ *— совокупность всех верхних граней* A*.*
Очевидно, $\iota \in A^{\triangle}$*, так что* $A^{\triangle} \neq \varnothing$*.*
По условию теоремы существует элемент $b = \inf A^{\triangle}$*, но по определению,* $b = \sup A$*, откуда заключаем, что* P *— полная решётка.*

Следствие

Конечное ч.у. множество P *является решёткой iff*

1. *оно имеет наибольший элемент;*
2. *для любых двух его элементов существует точная нижняя грань.*

Условие для ч.у. множества являться полной решёткой...

Обычно на практике проверка наличия у подмножеств ч.у. множества

> точных нижних граней — не вызывает затруднений,
> точных верхних граней — требует значительных усилий.

Данная теорема является эффективным критерием решёточности порядков, например:

Утверждение

Решётка всех разбиений множества является полной.

Доказательство

Точной нижней гранью любой совокупности эквивалентностей является их пересечение (всегда эквивалентность), а единицей решётки всех эквивалентностей (разбиений) множества служит универсальная эквивалентность ∇, называемая также аморфной. Далее применяем предыдущую теорему.

Разделы

Элементарное свойство решёток

Утверждение

Для любых элементов x, y, u, v *решётки* $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ *справедливо*

$$\begin{cases} x \sqsubseteq y \\ u \sqsubseteq v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \sqcup u \sqsubseteq y \sqcup v \\ x \sqcap u \sqsubseteq y \sqcap v \end{cases}.$$

Доказательство

$$\begin{cases} x \sqsubseteq y \\ u \sqsubseteq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \sqcap y = x \\ u \sqcap v = u \end{cases} \Rightarrow x \sqcap y \sqcap u \sqcap v = x \sqcap u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y \sqcap v) \sqcap (x \sqcap u) = x \sqcap u \Leftrightarrow x \sqcap u \sqsubseteq y \sqcap v .$$

Справедливость $x \sqcup y \sqsubseteq u \sqcup v$ *следует по двойственности.*

Неравенствам полудистрибутивности и полумодулярности

Теорема

Элементы x, y *и* z *любой решётки удовлетворяют следующим неравенствам полудистрибутивности*

$$Dtr1\sqsupseteq:\quad (x\sqcup y)\sqcap z \;\sqsupseteq\; (x\sqcap z)\sqcup(y\sqcap z);$$
$$Dtr2\sqsubseteq:\quad (x\sqcap y)\sqcup z \;\sqsubseteq\; (x\sqcup z)\sqcap(y\sqcup z)$$

и полумодулярности

$$Mod\sqsubseteq:\quad x\sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x\sqcup(y\sqcap z)\;\sqsubseteq\; y\sqcap(x\sqcup z);$$
$$Mod\sqsupseteq:\quad x\sqsupseteq y \;\Rightarrow\; x\sqcap(y\sqcup z)\;\sqsupseteq\; y\sqcup(x\sqcap z).$$

Лемма (о четырёх элементах)

Для любых элементов $x,\ y,\ u,\ v$ *решётки* $\langle L,\sqcup,\sqcap\rangle$ *справедливо соотношение* $x, y \sqsubseteq u, v \;\Rightarrow\; x\sqcup y \sqsubseteq u\sqcap v.$

По $Dtr2\sqsubseteq$ — $(u\sqcap v)\sqcup x \;\sqsubseteq\; (u\sqcup x)\sqcap(v\sqcup x)$, а поскольку $u\sqcup x = u,\ v\sqcup x = v$ и $y\sqsubseteq u\sqcap v$, то получаем требуемое.

Гомоморфизмы решёток

Определение

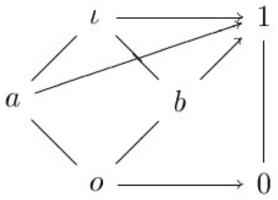
Отображение φ решётки L в решётку L' называется *алгебраическим* или *решёточным гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in L$ справедливы равенства

$$\varphi(x \sqcup y) = \varphi(x) \sqcup \varphi(y) \quad \text{и} \quad \varphi(x \sqcap y) = \varphi(x) \sqcap \varphi(y).$$

Биективный решёточный гомоморфизм есть *решёточный изоморфизм*, символически $L \cong L'$.
Изоморфизм решётки в себя называется *автоморфизмом*.
Инъективные и сюръективные решёточные гомоморфизмы называют решёточными (или алгебраическими) мономорфизмами (вложениями) и эпиморфизмами соответственно.

Связь порядкового и решёточного гомоморфизмов решёток

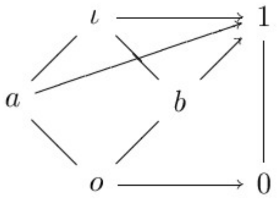
Связь порядкового и решёточного гомоморфизмов решёток



1. Порядковые гомоморфизмы решёток как ч.у. множеств, вообще говоря, не являются алгебраическими.

2. Любое отображение одной решётки на другую, сохраняющее хотя бы одну из решёточных операций, является порядковым гомоморфизмом.

Связь порядкового и решёточного гомоморфизмов решёток



1. Порядковые гомоморфизмы решёток как ч.у. множеств, вообще говоря, не являются алгебраическими.

2. Любое отображение одной решётки на другую, сохраняющее хотя бы одну из решёточных операций, является порядковым гомоморфизмом.

В случае изоморфизма проблемы снимаются.

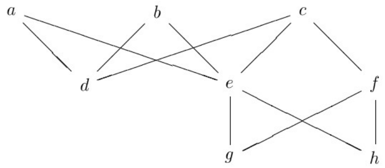
Теорема (об эквивалентности двух видов изоморфизма решёток)

Две решётки алгебраически изоморфны, iff они изоморфны как ч.у. множества.

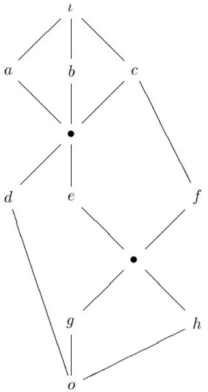
Пополнение произвольного ч.у. множество до (полной) решётки

Теорема (замыкание Макнила)

Всякое ч.у. множество можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.



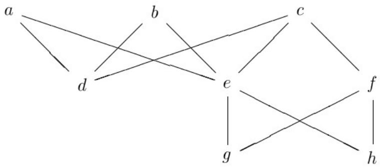
Элементы • — сечения Макнила.

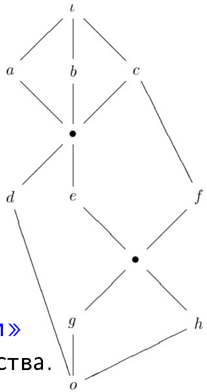


Пополнение произвольного ч.у. множество до (полной) решётки

Теорема (замыкание Макнила)

Всякое ч.у. множество можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.





Элементы • — сечения Макнила.

Теорема показывает, что знаменитое построение Р. Дедекиндом действительных чисел «сечениями» на самом деле применимо для любого ч.у. множества.

Доказательство теоремы о замыканиях Макнила

Доказательство.

Через $\widehat{R}$ обозначим ч.у. множество R, пополненное o и/или ι, если оно не имеет таковых.
Пусть P — ч.у. множество и $\varnothing \neq X \subseteq \widehat{P}$. Обозначим

$$G(X) = \widehat{X^{\vartriangle}} \text{ и } L(X) = \widehat{X^{\triangledown}}.$$

Множество $Q = \left\{ L(G(X)) \,\middle|\, X \in \mathcal{P}^*(\widehat{P}) \right\}$ с порядком по включению есть искомая решётка. $\square$

Говорят, что P пополняется сечениями Макнила, а Q является *замыканием (Макнила)* ч.у. множества P (символически $Q = \mathrm{comp}(P)$).

Понятно, что $P \overset{f}{\hookrightarrow} \mathrm{comp}(P)$, где $f(x) = L\left(G\left(\{x\}\right)\right)$.

Доказано, что $\dim(P) = \dim(\mathrm{comp}(P))$.

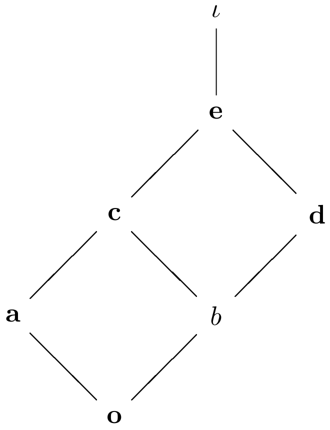
Подрешётки

Определение

Непустое подмножество L' решётки $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется её *подрешёткой* (символически $L' \leqslant L$), если L' устойчиво относительно сужений $\sqcup$ и $\sqcap$.

Из определения следует, что подмножество элементов решётки L может быть решёткой относительно наследуемого частичного порядка, но не подрешёткой L.

Решётка-подмножество, но не подрешётка



Подрешётки: некоторые свойства

1. Каждое подмножество решётки L является подрешёткой, если и только если L — цепь.
2. Если L — решётка, то совокупность её подрешёток $\mathrm{Sub}\, L$ — ч.у. множество, упорядоченное по включению.
3. Любой интервал решётки есть её подрешётка.
4. Пересечение подрешёток либо пусто, либо является подрешёткой. В силу этого, удобно считать подрешёткой и пустое множество: тогда пересечение любой совокупности — подрешётка.

Подрешётки: примеры...

5. Пусть $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Тогда совокупность её интервалов $Si(L)$ — также решётка относительно операций ($a, b, c, d \in L$)
$[a, b] \cup [c, d] \overset{\text{def}}{=} [a \sqcap c, b \sqcup d]$ и $[a, b] \cap [c, d] \overset{\text{def}}{=} [a \sqcup c, b \sqcap d]$.
Очевидно, $Si(L)$ — решётка с универсальными гранями: её единицей служит L, а нулём — пустой интервал, который может быть записан $[a, b]$ при $a > b$.

6. Если φ — гомоморфизм решётки L в решётку L', то $\operatorname{Im} \varphi \leqslant L'$.

7. Обозначим через $\mathbb{N}^{\circ}$ множество натуральных чисел, свободных от квадратов, включая в него и 1.
Тогда $\langle \mathbb{N}^{\circ}, \vee, \wedge \rangle \leqslant \langle \mathbb{N}, \vee, \wedge \rangle$.

Подрешётки: примеры...

8. С помощью теоремы об эквивалентности двух видов изоморфизма решёток устанавливается, что введённая выше решётка $\mathbb{N}^\circ$ изоморфна решётке $\mathcal{P}_0(A)$ всех конечных подмножеств счётного множества A.

   Положив $\varphi(1) = \varnothing$, построим биекцию φ между множеством простых чисел и A: пронумеруем элементы A в произвольном порядке — $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, и положим $\varphi(p_i) = a_i$, где p_i — i-е простое число.
   Таким образом определено инъективное отображение простых чисел из $\mathbb{N}^\circ$ в A.
   Для остальных элементов $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ из $\mathbb{N}^\circ$, положим $\varphi(n) = \{\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_k)\}$.

   Понятно, что $\mathbb{N}^\circ \overset{\varphi}{\cong} \mathcal{P}_0(A)$, если A — счётно.

Идеалы решёток

Определение

Пусть $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ — решётка. Непустое подмножество I элементов L называется её *(решёточным) идеалом*, если

$$(x \in I) \,\&\, (y \sqsubseteq x) \Rightarrow y \in I \quad \text{и} \quad x, y \in I \Rightarrow x \sqcup y \in I\,.$$

Двойственно, непустое подмножество F элементов L называется её *решёточным фильтром*, если

$$(x \in F) \,\&\, (x \sqsubseteq y) \Rightarrow y \in F \quad \text{и} \quad x, y \in F \Rightarrow x \sqcap y \in F\,.$$

Непустое подмножество I оказывается *решёточным идеалом*, iff справедлива эквивалентность

$$x, y \in I \Leftrightarrow x \sqcup y \in I$$

и аналогично для фильтров.

Идеалы решёток: свойства

- Если решётка имеет наименьший [наибольший] элемент, то он будет её идеалом [фильтром].
- Если a — элемент решётки, то главные порядковые идеал $J(a) = a^{\triangledown}$ и фильтр $a^{\vartriangle}$ являются, также и *главными решёточными* идеалом и фильтром.
- В конечной решётке все идеалы и фильтры — главные: если I — идеал конечной решётки, то рассмотрим элемент $x = \bigsqcup\limits_{a \in I} a$, для которого будем иметь $x \in I$ и $I = x^{\triangledown}$ (аналогично для фильтров).
  В бесконечных решётках могут существовать и *неглавные решёточные идеалы и фильтры*.

Идеалы решёток: примеры

1. Если A — бесконечное множество, то совокупность $\mathcal{P}_0(A)$ всех его конечных подмножеств будет неглавным идеалом решётки $\mathcal{P}(A)$.
2. В цепи $\left[0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, 1\right]$ неглавный идеал — $[0, 1)$.
3. Сама решётка L всегда будет своим (*несобственным*) идеалом и фильтром. Все другие идеалы и фильтры L называют *собственными*.

$J_*(L)$ — множество всех собственных решёточных идеалов L; это ч.у. множество, упорядоченное по включению.

Максимальные элементы $J_*(L)$ называют ***максимальными идеалами*** решётки L (т.е. максимальный идеал решётки не содержится ни в каком другом её собственном идеале).

Существование максимальных решёточных идеалов

Теорема

Всякий собственный идеал решётки с единицей содержится в некотором её максимальном идеале.

Доказательство

Пусть $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ — *решётка с единицей* ι, *и* $C = [J_1, J_2, \ldots]$ — *некоторая (конечная или бесконечная) цепь собственных идеалов* L. *Обозначим* $J = \bigcup\limits_{J_k \in C} J_k$.

Если $x \in J$, *то* $x \in J_k \in C$ *для некоторого* k *и для любого* $y \sqsubseteq x$ *имеем* $y \in J_k \subseteq J$. *Пусть* $x, y \in J$, *тогда* $x \in J_k \in C$ *и* $y \in J_l \in C$ *для некоторых* k, l.

Поскольку C — *цепь, то* J_k *и* J_l *сравнимы в* $J_*(L)$.
Без ограничения общности считаем, что $J_k \subseteq J_l$.
Тогда $x, y \in J_l$ *и, поскольку* J_l — *идеал, то* $x \sqcup y \in J_l \subseteq J$.

Существование максимальных решёточных идеалов...

Доказательство (продолжение)

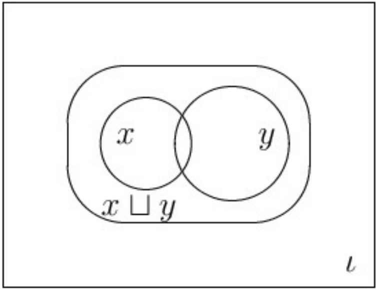
Таким образом, J — идеал решётки L.
Более того, он собственный, поскольку $\iota \notin J_k \in C$ влечёт $\iota \notin J$. С другой стороны, поскольку $J_k \subseteq J$ для всех $J_k \in C$, то J будет верхней гранью цепи C.
Отсюда по лемме Куратовского-Цорна вытекает утверждение теоремы.

Диаграммы Хассе остаются удобным способом описания решёток, однако если решётка устроена слишком сложно, такие диаграммы становятся мало наглядными.

Решётки: теоремы о вложениях

Теорема (о представлении решёток)

Всякая решётка может быть вложена в булеан подходящего множества с сохранением всех точных нижних граней.



Решётки: теоремы о вложениях...

Теорема (Макнил)

Всякую решётку можно вложить в подходящую полную решётку с сохранением всех точных граней.

Теорема

Всякую конечную решётку можно вложить в конечную решётку разбиений множества..

Разделы

Модулярные решётки

Определение

Решётка $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in L$ в ней выполняется следующий *модулярный закон*

$$Mod: x \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqcup (y \sqcap z) \;=\; y \sqcap (x \sqcup z).$$

Модулярные решётки

Определение

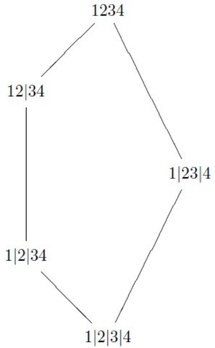
Решётка $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in L$ в ней выполняется следующий *модулярный закон*

$$Mod: x \sqsubseteq y \;\Rightarrow\; x \sqcup (y \sqcap z) \;=\; y \sqcap (x \sqcup z).$$

Пример

1. Модулярными являются все цепи, решётка $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, булевы алгебры.
2. Решётка $NSub\,G$ всех нормальных подгрупп группы G образует модулярна (пересечение групп всегда группа, а объединение нормальных подгрупп — их произведение).
3. Решётка всех эквивалентностей на данном множестве в общем случае не модулярна.

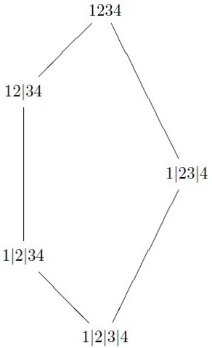
Пятиугольник N_5 — немодулярная решётка



$$\alpha = (1|2|34),\ \beta = (1|23|4),\ \gamma = (12|34),\ \alpha \sqsubseteq \gamma$$

$$\alpha \sqcup (\gamma \sqcap \beta) = \alpha \sqcup o = \alpha \neq \gamma \sqcap (\alpha \sqcup \beta) = \gamma \sqcap \iota = \gamma.$$

Пятиугольник N_5 — немодулярная решётка



$$\alpha = (1|2|34),\ \beta = (1|23|4),\ \gamma = (12|34),\ \alpha \sqsubseteq \gamma$$
$$\alpha \sqcup (\gamma \sqcap \beta) = \alpha \sqcup o = \alpha \neq \gamma \sqcap (\alpha \sqcup \beta) = \gamma \sqcap \iota = \gamma.$$

Немодулярность 5 оказывается ключевой:

Теорема (критерий модулярности решётки)

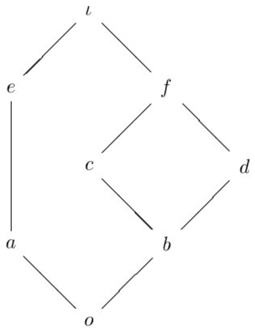
Решётка модулярна, iff никакая её подрешётка не изоморфна пятиугольнику N_5.

Цепное условие Жордана–Дедекинда и модулярность

Цепное условие Жордана–Дедекинда

Все максимальные цепи между двумя данными элементами локально конечного ч.у. множества имеют одинаковую длину.

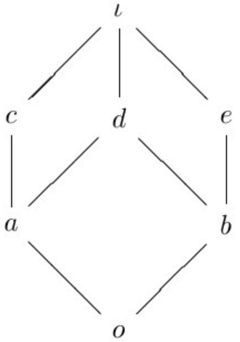
Невыполнение этого условия для решётки $\Rightarrow$ существование подрешётки, изоморфной N_5 $\Rightarrow$ её немодулярность.



Для этой решётки цепное условия Жордана–Дедекинда не выполняется и, как следствие, она содержит подрешётку, изоморфную N_5, что влечёт её немодулярность.

Цепное условие Жордана–Дедекинда и модулярность...

Выполнение условие Жордана–Дедекинда ещё не означает модулярности решётки.

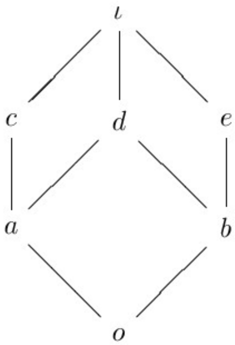


Для этой решётки цепное условия Жордана–Дедекинда выполняется, однако она немодулярна,т.к. содержит подрешётку

$$\{o, a, c, e, \iota\} \cong N_5.$$

Цепное условие Жордана–Дедекинда и модулярность...

Выполнение условие Жордана–Дедекинда ещё не означает модулярности решётки.



Для этой решётки цепное условия Жордана–Дедекинда выполняется, однако она немодулярна,т.к. содержит подрешётку

$$\{o, a, c, e, \iota\} \cong N_5.$$

А будет ли $\{o, a, c, b, \iota\} \cong N_5$ подрешёткой данной решётки?

Правило сокращения для модулярных решёток

Теорема

Решётка модулярна, если и только если при сравнимости её элементов x и y справедливо правило их сокращения

$$Abbr: \quad \forall z \begin{cases} x \sqcup z = y \sqcup z \\ x \sqcap z = y \sqcap z \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Доказательство

($\Rightarrow$) *Пусть для некоторых элементов x, y, z модулярной решётки справедливы и равенства $x \sqcup z = y \sqcup z$, $x \sqcap z = y \sqcap z$, и следование $x \sqsubseteq y$.*
Тогда

$$x \overset{Abs}{=} x \sqcup (x \sqcap z) = x \sqcup (y \sqcap z) \overset{Mod}{=} y \sqcap (x \sqcup z) = y \sqcap (y \sqcup z) \overset{Abs}{=} y.$$

($\Leftarrow$) *опустим.*

Дистрибутивные решётки

Определение

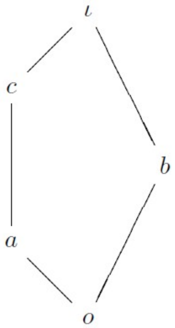
Решётка $\langle\, L, \sqcup, \sqcap \,\rangle$ называется *дистрибутивной*, если в ней выполняются дистрибутивные законы

$$(x \sqcup y) \sqcap z \;=\; (x \sqcap z) \sqcup (y \sqcap z);$$
$$(x \sqcap y) \sqcup z \;=\; (x \sqcup z) \sqcap (y \sqcup z).$$

Пример

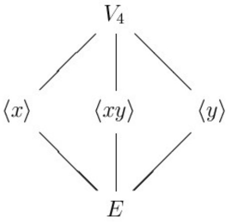
1. Все цепи, булевы алгебры и их подрешётки дистрибутивны.
2. Решётка всех подпространств векторного пространства, упомянутая выше в качестве примера модулярной решётки, не является дистрибутивной.
3. Решётка $\mathrm{Sub}\, C$ всех подгрупп циклической группы C дистрибутивна.

Всякая дистрибутивная решётка модулярна



$$(a \sqcup b) \sqcap c = \iota \sqcap c = c \neq (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c) = a \sqcup o = a$$

Модулярный закон — ослабленная форма второго дистрибутивного закона.



$V_4 = \langle\, e, x, y, xy \,\rangle$ — четверная группа Клейна, решётка $Sub\, V_4 \cong M_3$ (ромб) подгрупп V_4 (все они нормальны) модулярна, но не дистрибутивна ($\iota = V_4$, $o = E$):

$$(\langle x \rangle \sqcup \langle y \rangle) \sqcap \langle xy \rangle = \iota \sqcap \langle xy \rangle = \langle xy \rangle \neq$$
$$\neq (\langle x \rangle \sqcap \langle xy \rangle) \sqcup (\langle y \rangle \sqcap \langle xy \rangle) = o \sqcup o = o.$$

Критерий дистрибутивности решётки

Недистрибутивность M_3, оказывается ключевой: справедлива

Теорема

Модулярная решётка является дистрибутивной, iff никакая её подрешётка не изоморфна ромбу M_3.

Следствие (критерий дистрибутивности решётки)

Решётка дистрибутивна, iff никакая её подрешётка не изоморфна ни пятиугольнику N_5, ни ромбу M_3.

Правило сокращения

Теорема

Решётка дистрибутивна, если и только если в ней справедливо правило сокращения: $Abbr\ :\ \begin{cases} x \sqcup z = y \sqcup z \\ x \sqcap z = y \sqcap z \end{cases} \Rightarrow\ x = y.$

Доказательство

$(\Rightarrow)$ *Пусть для некоторых элементов* x, y, z *дистрибутивной решётки справедливы и равенства* $x \sqcup z = y \sqcup z$, $x \sqcap z = y \sqcap z$, *и следование* $x \sqsubseteq y$ *(т.к. любая дистрибутивная решётка — модулярная).*
Тогда

$$x \overset{Abs}{=} x \sqcup (x \sqcap z) = x \sqcup (y \sqcap z) \overset{Mod}{=} y \sqcap (x \sqcup z) = y \sqcap (y \sqcup z) \overset{Abs}{=} y\,.$$

Правило сокращения

Теорема

Решётка дистрибутивна, если и только если в ней справедливо правило сокращения: $Abbr\ :\ \begin{cases} x \sqcup z = y \sqcup z \\ x \sqcap z = y \sqcap z \end{cases} \Rightarrow\ x = y.$

Доказательство

$(\Rightarrow)$ *Пусть для некоторых элементов* x, y, z *дистрибутивной решётки справедливы и равенства* $x \sqcup z = y \sqcup z$, $x \sqcap z = y \sqcap z$, *и следование* $x \sqsubseteq y$ *(т.к. любая дистрибутивная решётка — модулярная).*
Тогда

$$x \overset{Abs}{=} x \sqcup (x \sqcap z) = x \sqcup (y \sqcap z) \overset{Mod}{=} y \sqcap (x \sqcup z) = y \sqcap (y \sqcup z) \overset{Abs}{=} y\,.$$

$(\Leftarrow)$ *Опустим.*

Дистрибутивность решётки $J(P)$ порядковых идеалов ч.у. множества P

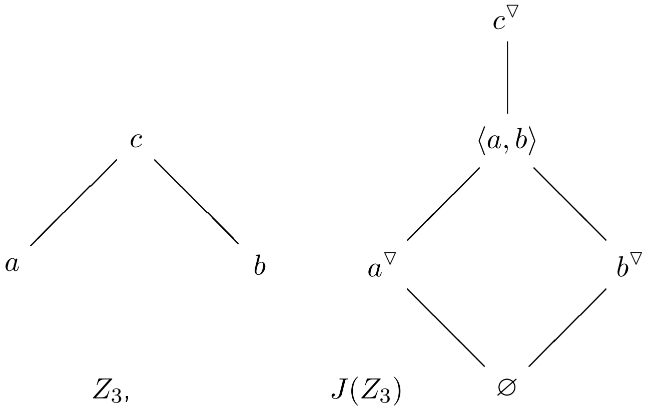
Лемма

$J(P) \leqslant \langle \mathcal{P}(P), \cup, \cap \rangle \Rightarrow$ *решётка* $J(P)$ *дистрибутивна.*

Дистрибутивность решётки $J(P)$ порядковых идеалов ч.у. множества P

Лемма

$J(P) \leqslant \langle \mathcal{P}(P), \cup, \cap \rangle \Rightarrow$ решётка $J(P)$ дистрибутивна.



Неразложимые элементы решёток

В конечных дистрибутивных решётках важную роль играют не атомы (например, в конечной цепи всего один атом), а неразложимые в объединение элементы.

Определение

Элемент $z \neq o$ решётки назовём *неразложимым*, если из $z = x \sqcup y$ следует либо $z = x$, либо $z = y$.

Пример

1. Атомы любой решётки неразложимы, и в атомной булевой алгебре нет других неразложимых элементов.
2. В решётке $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ неразложимы только степени простых чисел.
3. В цепи ни один элемент не является разложимым.

Неразложимые элементы решёток...

Лемма

В конечной решётке каждый ненулевой элемент может быть представлен в виде объединения неразложимых элементов.

Доказательство

Пусть $b = b_1 \sqcup b_2$ и $b_1 \neq b \neq b_2$.
Если и b_1, и b_2 неразложимы, то лемма доказана.
Иначе представляем b_1 и/или b_2 в виде объединения строго содержащихся в них элементов, и т.д.; в силу конечности решётки указанный процесс закончится.

Следствие: всякий ненулевой элемент атомной булевой алгебры представим в виде объединения содержащихся в нём атомов. Действительно, (1) булева алгебра — решётка; (2) её атомы — неразложимы и (3) неразложимы только атомы.

Представление произвольных элементов решётки через неразложимые

Обозначения для подмножеств элементов (дистрибутивной) решётки L:

- $\operatorname{Irr} L$ — множество неразложимых в объединение элементов L;
- $\operatorname{Irr}(x) = \{ y \in \operatorname{Irr} L \mid y \sqsubseteq x \}$ — множество неразложимых элементов L, содержащихся в x.

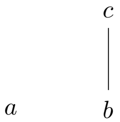
Доказанная лемма утверждает, что в конечной решётке каждый ненулевой элемент x допускает представление:

$$x = \bigsqcup_{a \in \operatorname{Irr}(x)} a.$$

Построение решётки $J(P)$ казуального ч.у. множества P

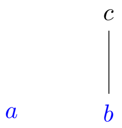
1. Построим диаграмму булевой алгебры $\mathcal{P}(M) = J(M)$ для множества M минимальных элементов P.
2. Выберем некоторый минимальный элемент x множества $P \setminus M$ и пусть S_x — множество непосредственно предшествующих ему элементов.
Присоединим к $J(M)$ элемент $\langle x \rangle$, который будет неразложим в объединение и непосредственно следовать за порядковым идеалом, порождённым S_x.
3. Добавим все объединения имеющихся и вновь построенных элементов с $\langle x \rangle$ так, чтобы они образовали булеву алгебру.
4. Выберем новый минимальный элемент y множества $\{P \setminus M\} \setminus \{x\}$ и достроим диаграмму аналогичным способом.
5. Продолжаем так, пока не получим диаграмму $J(P)$.

Построение решётки порядковых идеалов ч.у. множества: пример

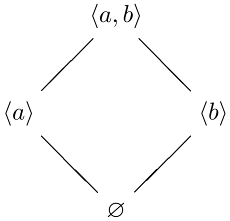


P

Построение решётки порядковых идеалов ч.у. множества: пример...

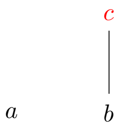


P

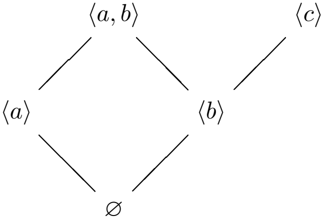


$J(a, b)$

Построение решётки порядковых идеалов ч.у. множества: пример...

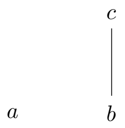


P

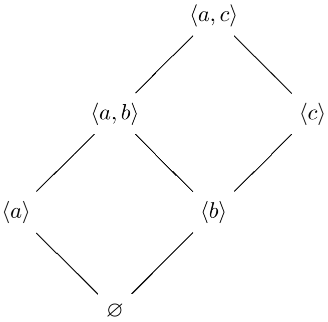


$J(a, b) + \langle c\rangle$

Построение решётки порядковых идеалов ч.у. множества: пример...

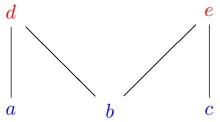


P

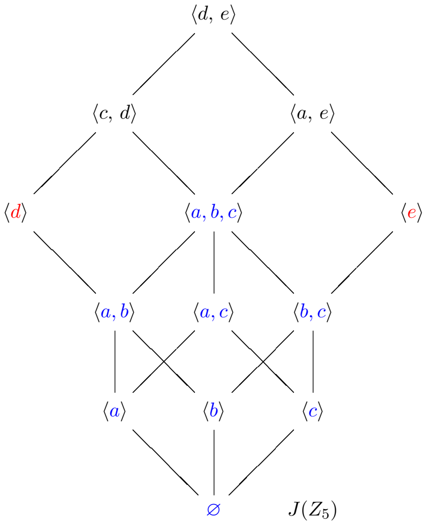


$J(P)$

Построение $J(Z_5)$



Z_5



$J(Z_5)$

Числа $|J(\mathcal{P})|$ и $e(\mathcal{P})$

$|J(\mathcal{P})|$ — Известно, что зигзаг $\mathbb{Z}_n$ имеет F_{n+2} ($(n+2)$-е число Фибоначчи) порядковых идеалов.
Например, в нашем случае $|J(Z_5)| = F_7 = 13$.

$e(\mathcal{P})$ — Доказано, что $e(P)$ равно числу максимальных восходящих от наименьшего элемента $\varnothing$ к наибольшему P^{∇} цепей в решётке $J(\mathcal{P})$.
Для примера с Z_5 можно подсчитать, что таких путей 16.
С другой стороны, $e(Z_5)$ есть $5!$ умноженное на пятое число тангенса — коэффициент при x^5 в разложении $\operatorname{tg} x$ в ряд Маклорена, т.е. $e(Z_5) = 5!\frac{2}{15} = 16$.

Число $e(\mathbf{s}_n)$

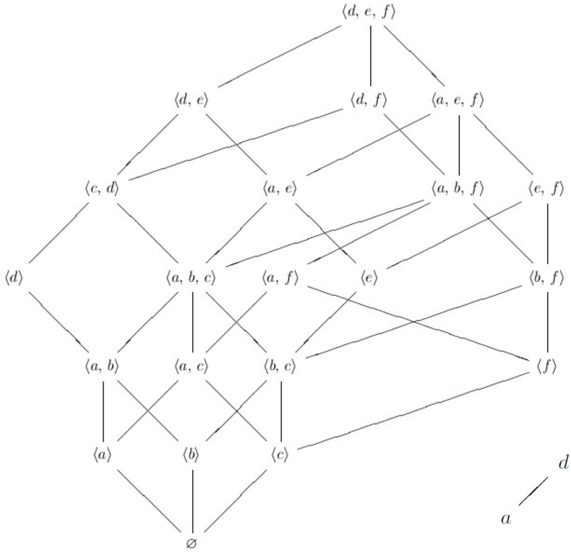
Теорема

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e(\mathbf{s}_n)}{n!} x^n = \frac{x}{\cos^2 x}.$$

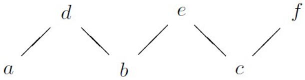
Числа $e(\mathbf{s}_n)$ и, для сравнения, числа секанса $e(Z_{2n})$ для первых значений n приведены в таблице.

n	2	3	4	5	6	7
$e(\mathbf{s}_n)$	4	48	1 088	39 680	2 122 752	156 577 855
$e(Z_{2n})$	5	61	1 385	50 521	2 702 765	199 360 981

$J(Z_6)$



Z_6

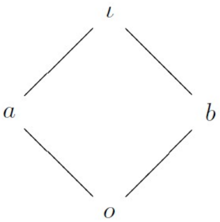


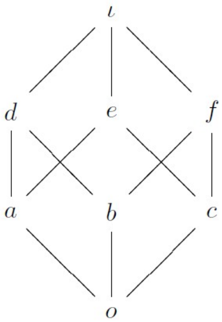
$|J(B^n)| = ?$

Значения $|J(B^n)|$ (для других n значения неизвестны):

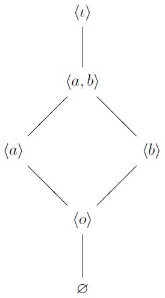
n	1	2	3	4	5	6	7
$\lvert J(B^n)\rvert$	3	6	20	168	7 581	7 828 354	2 414 682 040 998

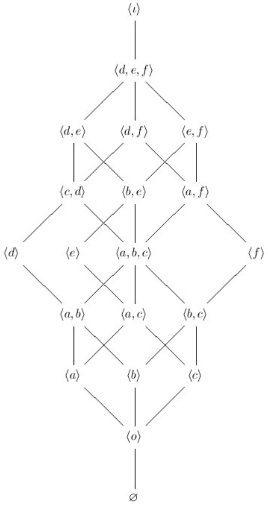
На следующем слайде — диаграммы $J(B^2)$ и $J(B^3)$





$|J(B^2)| = 6,\ |J(B^3)| = 20$


$\langle \iota \rangle$
$\langle a, b \rangle$
$\langle a \rangle$
$\langle b \rangle$
$\langle o \rangle$
$\varnothing$


$\langle \iota \rangle$
$\langle d, e, f \rangle$
$\langle d, e \rangle$
$\langle d, f \rangle$
$\langle e, f \rangle$
$\langle c, d \rangle$
$\langle b, e \rangle$
$\langle a, f \rangle$
$\langle d \rangle$
$\langle e \rangle$
$\langle a, b, c \rangle$
$\langle f \rangle$
$\langle a, b \rangle$
$\langle a, c \rangle$
$\langle b, c \rangle$
$\langle a \rangle$
$\langle b \rangle$
$\langle c \rangle$
$\langle o \rangle$
$\varnothing$

Изоморфизм ч.у. множества и неразложимых элементов решётки его порядковых идеалов

Лемма

Если P *— ч.у. множество, то* $\mathrm{Irr}\ J(P) \cong \mathcal{P}$.

Доказательство

Пусть P *— ч.у. множество и* $J(P)$ *— (дистрибутивная) решётка его порядковых идеалов. Порядковый идеал решётки неразложим, iff он является главным:*

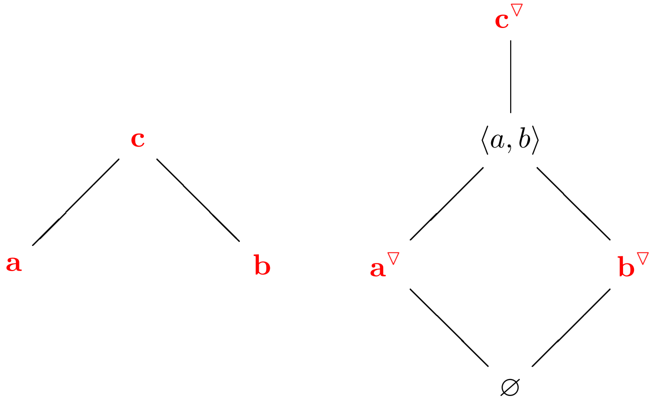
$$x^{\triangledown} \Rightarrow \mathrm{Irr}\ J(P) \cong J_0(P) = \{\, x^{\triangledown} \mid x \in P \,\}.$$

Ранее был установлен изоморфизм между ч.у. множеством и совокупностью его главных идеалов:

$$\varphi : P \to J(P), \quad \varphi(x) = x^{\triangledown},$$

поэтому $P \cong J_0(P) = \mathrm{Irr}\ J(P)$.

$\mathrm{Irr}\ J(P) \cong P$: пример



Z_3, множество $Irr\, J(Z_3)$ выделено

Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решётках

Теорема (ФТКДР, *Г. Биркгоф*)

Всякая конечная дистрибутивная решётка L изоморфна решётке $J(Irr\,L)$ порядковых идеалов ч.у. множества её неразложимых элементов.

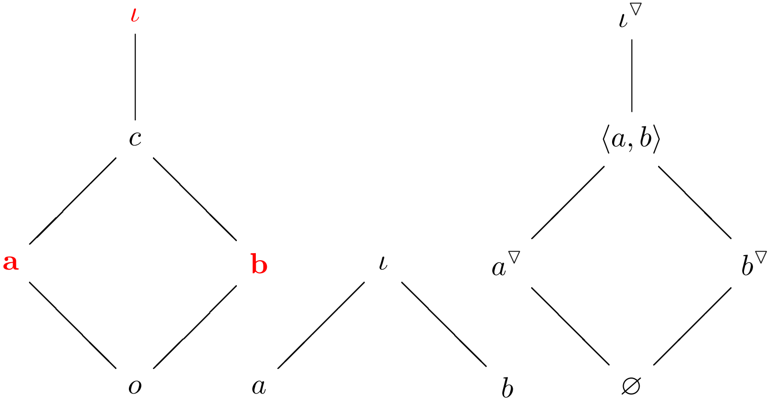
Доказательство (набросок)

Рассмотрим отображение $\psi : L \to J(\mathrm{Irr}\ L)\,, \quad \psi(x) = \mathrm{Irr}(x)$.

- ψ *есть* ***биекция*** *(при доказательстве сюръективности существенна конечность L);*
- $x \sqsubseteq y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Irr}(x) \subseteq \mathrm{Irr}(y) \;\Leftrightarrow\; \psi(x) \subseteq \psi(y)$.

$\therefore$ ψ — *(порядковый)* ***изоморфизм*** *между L и $J(\mathrm{Irr}\ L)$.*

ФТКДР $L \cong J(Irr\,L)$: иллюстрация



L $\quad$ $Irr\,L$ $\quad$ $J(Irr\,L)$

ФТКДР...

- Теорема Биркгофа позволяет представлять элементы любой дистрибутивной решётки подмножествами некоторого множества и пользоваться диаграммами Эйлера-Венна.
- Из неё также вытекает интересное

Следствие

Всякая конечная дистрибутивная решётка вложима в упорядоченную делимостью решётку натуральных чисел

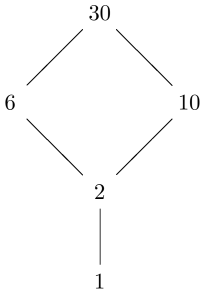
$$L \hookrightarrow \langle \mathbb{N}^\circ, \vee, \wedge \rangle \leqslant \langle \mathbb{N}, | \rangle.$$

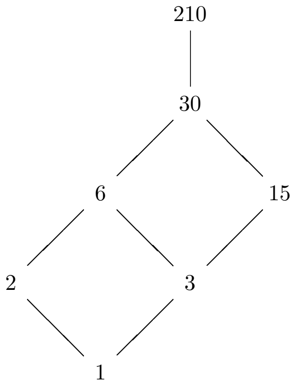
$\mathbb{N}^\circ$ — множество натуральных чисел, свободных от квадратов.

Вложение $L \hookrightarrow \langle \mathbb{N}, | \rangle$: алгоритм

1. Наименьшему элементу o решётки L сопоставляется число 1, а $n \geqslant 1$ её атомам — первые n простых чисел $p_1, \ldots, p_n$.
2. Пусть состоялось приписывание всем элементам множества $x^{\triangledown} \setminus \{x\}$ элемента x решётки L.
   Если элементу x непосредственно предшествует
   - единственный элемент, которому сопоставлено число k, то сопоставляем x число kp, где p — первое из ещё не использованных простых чисел;
   - несколько элементов, то сопоставляем x наименьшее общее кратное всех чисел, им соответствующих.

Вложение $L \hookrightarrow \langle \mathbb{N}, \mid \rangle$: пример





Разделы

Конгруэнции: определение

Пусть L — решётка и на ней имеется отношение эквивалентности $\sim$, стабильные относительно объединения и пересечения (сохраняющее их):

$$\begin{cases} a \sim c \\ b \sim d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a \sqcup b) \sim (c \sqcup d) \\ (a \sqcap b) \sim (c \sqcap d) \end{cases}.$$

Такие эквивалентности называют *конгруэнциями*.

Приведённые условия позволяют рассматривать факторомножество $L/\sim$ с операциями $\sqcup$ и $\sqcap$, применяемым к его элементам (классам эквивалентности), т.е. *факторрешётку* L по конгруэнции $\sim$ (символически $L/\sim$).

Конгруэнции: пример

Для гомоморфизма решёток $\varphi\colon L \to L'$ определяется ядерная эквивалентность $\operatorname{Ker}\varphi$:

$$a(\operatorname{Ker}\varphi)b \;\Leftrightarrow\; \varphi(a) \;=\; \varphi(b).$$

Без труда проверяется, что $\operatorname{Ker}\varphi$ — эквивалентность; эту эквивалентность называют *ядерной*.

Далее имеем

$$\left\{\begin{array}{l} a(\operatorname{Ker}\varphi)c \\ b(\operatorname{Ker}\varphi)d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \varphi(a\sqcup b) = \varphi(a)\sqcup\varphi(b) = \varphi(c)\sqcup\varphi(d) = \varphi(c\sqcup d), \\ \varphi(a\sqcap b) = \varphi(a)\sqcap\varphi(b) = \varphi(c)\sqcap\varphi(d) = \varphi(c\sqcap d). \end{array}\right.$$

Следовательно, $(a\sqcup b)\,(\operatorname{Ker}\varphi)\,(c\sqcup d)$ и $(a\sqcap b)\,(\operatorname{Ker}\varphi)\,(c\sqcap d)$, т.е. $\operatorname{Ker}\varphi$ оказывается конгруэнцией.

Эта конгруэнция называется *ядром гомоморфизма* φ.

Эквивалентность по идеалу дистрибутивной решётки

Пусть I — идеал дистрибутивной решётки L.
Введём на L бинарное отношение $\sim_I$:

$$a \sim_I b \;\Leftrightarrow\; \underset{I}{\exists} x \; (a \sqcup x = b \sqcup x).$$

$\sim_I$ есть эквивалентность: рефлексивность и симметричность очевидны; покажем транзитивность.

Пусть $a \sim_I b$ и $b \sim_I c$. Это означает существование $x, y \in I$ таких, что $a \sqcup x = b \sqcup x$ и $b \sqcup y = c \sqcup y$.
Далее (объединяя левые и правые части первого равенства с y, а второго — с x), получим

$$\begin{cases} a \sqcup x = b \sqcup x \\ b \sqcup y = c \sqcup y \end{cases} \Rightarrow\; a \sqcup (x \sqcup y) = b \sqcup (x \sqcup y) = c \sqcup (x \sqcup y)$$

и $a \sim_I c$, поскольку $x \sqcup y \in I$.

Эквивалентность $\sim_I$ является конгруэнцией

Обозначения: смежные классы по $\sim_I$ — $[\cdot]_I$ (очевидно $[a]_I = a \sqcup I$ для элемента $a \in L$; индекс I часто опускают); фактормножество по эквивалентности — L/I.

Покажем теперь, что $\sim_I$ — конгруэнция. Имеем

$$\left\{\begin{array}{l} a \sim c \\ b \sim d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists x \in I \ (a \sqcup x = c \sqcup x) \\ \exists y \in I \ (b \sqcup y = d \sqcup y) \end{array}\right. . \qquad (*)$$

1. Для объединения получим

$$\exists x, y \in I \ [(a \sqcup b) \sqcup (x \sqcup y) = (c \sqcup d) \sqcup (x \sqcup y)],$$

и, поскольку $x \sqcup y \in I$, то $(a \sqcup b) \sim_I (c \sqcup d)$.

2. Для пересечения —

$$\exists x, y \in I \ [(a \sqcup x) \sqcap (b \sqcup y) = (c \sqcup x) \sqcap (d \sqcup y)].$$

Раскрывая по равенство, по дистрибутивности —

$(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap b) \sqcup (x \sqcap y) = (c \sqcap d) \sqcup (c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap d) \sqcup (x \sqcap y),$

$(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap b) \sqcup (x \sqcap y) \;=\; (c \sqcap d) \sqcup (c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap d) \sqcup (x \sqcap y)$

Осталось показать, что

$$(a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap b) \sqcup (x \sqcap y) \;=\; (c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap d) \sqcup (x \sqcap y).$$

Для этого берём пересечения с y первого и с x — второго равенства из правой части соотношения $(*)$:

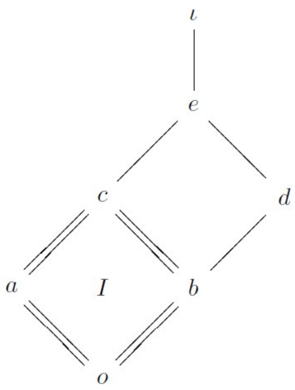
$$\left\{ \begin{array}{l} (a \sqcup x) \sqcap y = (c \sqcup x) \sqcap y \\ (b \sqcup y) \sqcap x = (d \sqcup y) \sqcap x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y) = (c \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y) \\ (b \sqcap x) \sqcup (x \sqcap y) = (d \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y) \end{array} \right.$$

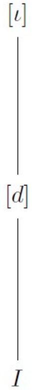
и, производя объединение соответствующих левых и правых частей, — требуемое равенство.

Итого:

- $\sim_I$ является конгруэнцией и операции $\sqcup$ и $\sqcap$ на L/I определяются корректно (результат не зависит от выбранных элементов в классах);
- L/I есть факторрешётка с нулём и ядро гомоморфизма $\varphi\colon L \to L/I$, $\varphi(x) = [x]_I$ — данный идеал I.

Факторрешётка: пример





Множество $I = \{o, a, b, c\}$ — идеал решётки.
При этом $e \sim_I d$, поскольку для $c \in I$ получим $e \sqcup c = d \sqcup c$, т.е. элементы e и d находятся в одном классе эквивалентности по I.

Гомоморфизм $\varphi\colon L \to L/I$ есть отображение $\varphi(x) = [x]_I$ и идеал I есть нуль решётки L/I.

Дополнения в решётках: определения

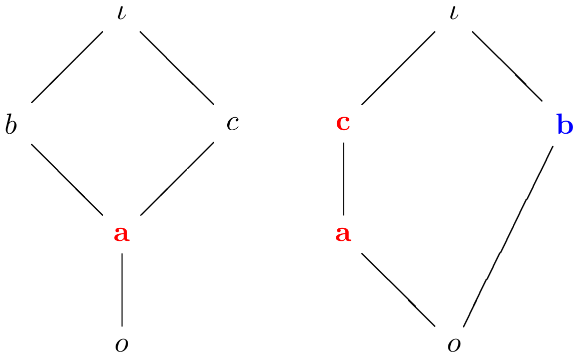
Определение

Если в решётке $\langle L, \sqcup, \sqcap \rangle$ с универсальными гранями для элемента x существует элемент y такой, что $x \sqcap y = o$ и $x \sqcup y = \iota$, то последний называется *дополнением элемента* x.

Решётка называется решёткой с дополнениями, если в ней каждый элемент имеет хотя бы одно дополнение.
Если каждый элемент решётки обладает в точности одним дополнением, то её называют решёткой с единственными дополнениями.

Классический пример решётки с единственными дополнениями: в решётке алгебры подмножеств множества A каждый элемент $X \subseteq A$ имеет единственное дополнение $\overline{X} = A \setminus \{X\}$.

Дополнения в решётках: примеры



а) элемент $\mathbf{a}$ не имеет дополнения;

б) N_5 — решётка с дополнениями, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ — дополнения $\mathbf{b}$

Решётки с дополнениями: свойства

- Если атомная решётка с дополнениями не содержит в качестве подрешётки пятиугольник N_5, наименьший и наибольший элементы которого совпадают с нулём и единицей решётки, то она модулярна (теорема Маклафлина — упрощение критерия модулярности).
- Атомная решётка с единственными дополнениями дистрибутивна (теорема Биркгофа-Уорда).
- Если ограниченная решётка дистрибутивна, то каждый её элемент имеет не более одного дополнения. Действительно, пусть элемент x дистрибутивной решётки имеет два дополнения — y_1 и y_2. Тогда

$$\begin{cases} x \sqcup y_1 = x \sqcup y_2 = \iota \\ x \sqcap y_1 = x \sqcap y_2 = o \end{cases} \overset{Abbr}{\Rightarrow} y_1 = y_2 .$$

Относительные дополнения: определение

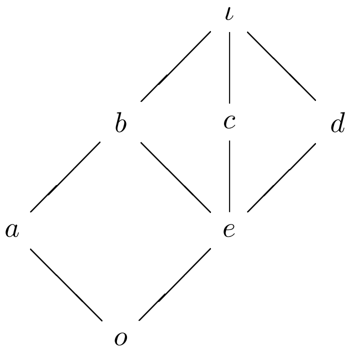
Определение

Если $[a, b]$ — интервал решётки L, $x \in [a, b]$ и элемент y решётки L таков, что $x \sqcap y = a$ и $x \sqcup y = b$, то y называется *относительным дополнением элемента x в интервале $[a, b]$*.
Если в некоторой решётке все интервалы суть решётки с дополнениями, то она называется *решёткой с относительными дополнениями*.

Если y — относительное дополнение элемента x в интервале $[a, b]$, то $y \in [a, b]$, и x, в свою очередь, также будет относительным дополнением элемента y в интервале $[a, b]$.

Дистрибутивная решетка с нулем и относительными дополнениями называется *алгеброй Ершова*.

Относительные дополнения: пример



Элемент d есть дополнение элемента a.
Элемент e дополнения не имеет.
Дополнениями b в интервале $[e, \iota]$ являются элементы c и d.
Элементы a и e — единственные дополнения друг друга в интервале $[o, b]$.

Разделы

Классификация по прецедентам: постановка задачи

1. Множество объектов $\mathcal{X}$ разделено на несколько подмножеств (*классов*).
2. Информация о таком разбиении содержится только в указании о принадлежности к данным классам элементов конечной *обучающей последовательности (выборки)* из $\mathcal{X}$, элементы которой называют *прецедентами*.
3. Объекты имеют описание на некотором формальном языке, указывающем степень обладания объектами конечным числом признаков из множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Классификация: подходы к решению задачи

- метрические методы (*NN*, ...);
- разделяющие поверхности (*SVM*, ...);
- потенциальные функции;
- логические методы;
- коллективные решающие правила (*области компетенции, голосование, алгебраический подход*);
- структурные методы;
- ...
- реляционный подход (*АФП (FCA)*, ...)

Классификация: подходы к решению задачи

- метрические методы (*NN*, ...);
- разделяющие поверхности (*SVM*, ...);
- потенциальные функции;
- логические методы;
- коллективные решающие правила (*области компетенции, голосование, алгебраический подход*);
- структурные методы;
- ...
- реляционный подход (*АФП (FCA)*, ...)

Wille R., Ganter B. Formal concept analysis. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.

Соответствия Галуа: определение

Далее запись отображений:
$f(a)$ записывается как af, а $f(A)$ записывается как Af.

Соответствия Галуа: определение

Далее запись отображений:
$f(a)$ записывается как af, а $f(A)$ записывается как Af.

Определение

Пусть $\mathcal{P} = \langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\mathcal{Q} = \langle Q, \sqsubseteq_P \rangle$ — ч.у. множества.
Пара отображений (φ, ψ), $\varphi : P \to Q$, $\psi : Q \to P$,
удовлетворяющая свойствам

1. φ и ψ антиизотонны;
2. $p\varphi\psi \sqsupseteq p$ и $q\psi\varphi \sqsupseteq q$, $p \in P$, $q \in Q$ ($\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ — *операторы замыкания* на P и Q соответственно).

называется *соответствием Галуа* между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Справедливы и более сильные соотношения

$$p \sqsubseteq q\psi \Leftrightarrow q \sqsubseteq p\varphi \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi\psi\varphi,\ \psi = \psi\varphi\psi.$$

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений об отличительных признаках вещей и отношений между ними

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений об отличительных признаках вещей и отношений между ними

Примеры:

искусство, *наука*, ...

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений об отличительных признаках вещей и отношений между ними

Примеры:

искусство, *наука*, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Понятие: философское отступление...

Понятие — это ...

... целостная совокупность суждений об отличительных признаках вещей и отношений между ними

Примеры:

искусство, *наука*, ...

Объём понятия — это ...

... *совокупность всех вещей*, обладающих зафиксированными в данном понятии признаками

Примеры:

искусство: *литература*, *живопись*, *архитектура*,...

наука: *биология*, *физика*, *химия*...

Понятие: философское отступление...

Содержание понятия — это ...

... *совокупность свойств*, присущих всем объектам данного понятия

Понятие: философское отступление...

Содержание понятия — это ...

... *совокупность свойств*, присущих всем объектам данного понятия

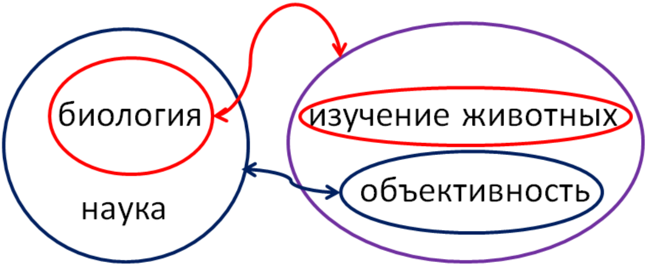
Примеры:

искусство: *результат отражения действительности в форме чувственных образов, создание выразительных форм, ...*

наука: *познавательная деятельность, объективность, систематичность, ...*

Закон обратного отношения между содержанием и объёмом понятия:

Бóльшее по объёму понятие имеет меньшее содержание



Антимонотонность соответствий Галуа отражает этот закон

Классификация: положительные и отрицательные примеры

Рассматриваются задачи, в которых множество $\mathcal{X}$ разбито на два непересекающихся класса:
$\mathcal{X}^+$ (*положительный*) и $\mathcal{X}^-$ (*отрицательный*)
относительно обладания/необладания их объектами некоторым целевым признаком $z \notin M$.

Прецеденты из данных классов называются, соответственно, *положительными* и *отрицательными примерами*.

Имеем 2 класса и $z = "x \in \mathcal{X}^+"$

АФП: формальный контекст

Пусть

G — *множество объектов*;
M — *множество признаков*;
I — соответствие между G и M называемое *отношением инцидентности*, т.е. gIm означает, что объект $g \in G$ обладает признаком $m \in M$.

Определение

Тройка $K = (G, M, I)$ называется *формальным контекстом*.

В конечном случае контекст может быть задан в виде объектно-признаковой $(0, 1)$-матрицы.

Соответствия Галуа в АФП и нотация

Утверждение

Если для произвольных $A \subseteq G$ *и* $B \subseteq M$ *ввести отображения*

$$\varphi : 2^G \to 2^M \quad \text{и} \quad \psi : 2^M \to 2^G$$

такие, что

$$\begin{aligned} A\varphi &= \{\, m \in M \mid \forall\, g \in A \, (gIm) \,\} = A', \\ B\psi &= \{\, g \in G \mid \forall\, m \in B \, (gIm) \,\} = B', \end{aligned}$$

то пара отображений (φ, ψ) *будет соответствием Галуа между ч.у. множествами* 2^G *и* 2^M*,*
упорядоченными по включению.

Формальные объём и содержание

Определение

Пусть дан контекст $K = (G, M, I)$.
Пара подмножеств $(A,\, B)$, где $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, и таких, что $A' = B$ и $B' = A$, называется *формальным понятием* данного контекста с *формальным объёмом* A и *формальным содержанием* B.

Если контекст представлен в виде объектно-признаковой $(0, 1)$-матрицы, то формальному понятию соответствует максимальная её подматрица, заполненная единицами.

Формальные объём и содержание — замкнутые, соответственно, относительно $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ множества.

Решётка формальных понятий

Теорема (основная АФП)

Множество всех формальных понятий данного контекста K образует полную решётку, обозначаемую $\mathfrak{B}(K)$, относительно операций $\vee$ (объединение) и $\wedge$ (пересечение):

$$(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) = \big((B_1 \cap B_2)', B_1 \cap B_2\big),$$
$$(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) = \big(A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)'\big)$$

и называемую решёткой формальных понятий.

$$(A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2) \Rightarrow (A_1 \subseteq A_2) \,\&\, (B_1 \supseteq B_2)$$

У решётки $\mathfrak{B}(K)$ формального контекста $K = (G, M, I)$:

единица ι — формальное понятие (G, G');
атомы — формальные понятия вида (g, g');
нуль o — формальное понятие $(\varnothing, M)$ с пустым объёмом.

Два контекста: объём и содержание

Данные для обучения классификации описываются *положительным* $K_+ = (G_+, M, I_+)$ и *отрицательным* $K_- = (G_-, M, I_-)$ *контекстами*.

Операторы Галуа в этих контекстах обозначаются соответствующими верхними индексами: A^+, A^-, B^+ и т.д.

Определение

Формальное понятие $(A_+, B_+) \in K_+$ называется *положительным*.
A_+ — положительный формальный объём,
B_+ — положительное формальное содержание.

Аналогично определяются отрицательные формальные объём и содержание для контекста K_-.

Гипотезы формальных контекстов

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

Гипотезы формальных контекстов

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной $\oplus-$предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_- \ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;

Гипотезы формальных контекстов

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной $\oplus-$предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_-\ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной $\oplus-$гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_-\ (B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;

Гипотезы формальных контекстов

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной $\oplus-$предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_-\ (B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной $\oplus-$гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_-\ (B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной $\oplus-$гипотезой*, если $\exists (g, g^-) \in K_-\ (B_+ \subseteq g^-)$.

Гипотезы формальных контекстов

Определение

Положительное формальное содержание B_+ положительного понятия (A_+, B_+) называется:

- *положительной $\oplus$−предгипотезой*, если $\forall (A_-, B_-) \in K_-$ $(B_+ \neq B_-)$, т. е. оно не является формальным содержанием ни одного отрицательного понятия;
- *положительной $\oplus$−гипотезой*, если $\forall (g, g^-) \in K_-$ $(B_+ \not\subseteq g^-)$, т. е. оно не является подмножеством содержания понятия какого-либо отрицательного примера g;
- *фальсифицированной положительной $\oplus$−гипотезой*, если $\exists (g, g^-) \in K_-$ $(B_+ \subseteq g^-)$.

Отрицательные ($\ominus$−предгипотезы, ...) определяются аналогично.

Гипотеза является также и предгипотезой.

Классификация с помощью гипотез

Гипотезы используются для классификации новых объектов

Простейшее решающее правило

Пусть $g \notin \{G_+ \cup G_-\}$ — новый (неопределённый) объект.

Если его формальное содержание g' содержит хотя бы одну

- $\oplus$—гипотезу и не содержит ни одной отрицательной гипотезы, то он относится к положительному классу;
- $\ominus$—гипотезу и не содержит ни одной положительной гипотезы, то он относится к отрицательному классу.

Отказ от классификации происходит, если g':

- либо не содержит никаких гипотез (недостаток данных);
- либо содержит как положительные, так и отрицательные гипотезы (противоречие в данных).

Многозначные контексты

Для получения бинарной информации о признаках из количественных и качественных признаков используется процедура шкалирования.

Многозначный контекст — это четвёрка (G, M, Z, I), где

- G, M, Z — множества объектов, признаков и значений признаков соответственно,
- I — тернарное отношение $I \subseteq G \times M \times Z$, задающее значение $z \in Z$ признака $m \in M$ объекта $g \in G$,

причем отображение $G \times M \to Z$ функционально.

Шкалирование — это представление многозначных контекстов двузначными.

Пример «Фрукты»: постановка задачи

Задача:

построить классификатор по целевому свойству z = *«являться фруктом»* и следующей объектно-признаковой таблице положительных и отрицательных примеров:

№	$G \setminus M$	**цвет**	**жёсткий**	**гладкий**	**форма**	z
1	**яблоко**	жёлтое	нет	да	круглое	$+$
2	**грейпфрут**	жёлтый	нет	нет	круглый	$+$
3	**киви**	зелёный	нет	нет	овальное	$+$
4	**слива**	синяя	нет	да	овальная	$+$
5	**кубик**	зелёный	да	да	кубический	$-$
6	**яйцо**	белое	да	да	овальное	$-$
7	**теннисный мяч**	(белый)	нет	нет	круглый	$-$

Пример «Фрукты»: результат шкалирования

G \ M	w	y	g	b	f	$\bar{\text{f}}$	s	$\bar{\text{s}}$	r	$\bar{\text{r}}$	z
1		×				×	×		×		+
2		×				×		×	×		+
3			×			×		×		×	+
4				×		×	×			×	+
5			×		×		×			×	−
6	×				×		×			×	−
7	×					×		×	×		−

$G_+ = \{1,2,3,4\}$, $G_- = \{5,6,7\}$ $\Rightarrow$ отношение I_+ представлено верхней частью таблицы, а отношение I_- — нижней.

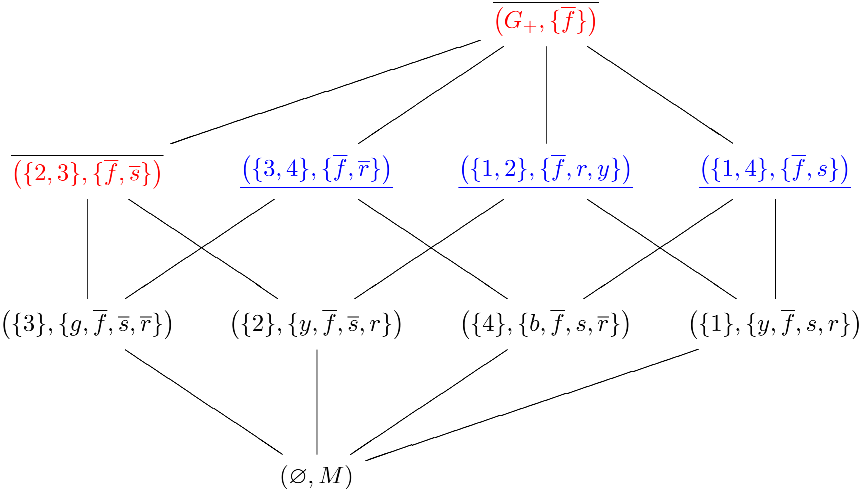
Признаки означают:

w — *белый*, y — *жёлтый*, g — *зелёный*, b — *синий*;

f — *твёрдый*, $\overline{f}$ — *мягкий*, s — *гладкий*, $\overline{s}$ — *шероховатый*;

r — *круглый*, $\overline{r}$ — *некруглый*.

Пример «Фрукты»: решётка $\mathfrak{B}(K_+)$



Пример «Фрукты»: решётка $\mathfrak{B}(K_-)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (G_-, \varnothing) \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\underline{(\{6,7\}, \{w\})} \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \underline{(\{5,6\}, \{f, s, \overline{r}\})} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \\
\big(\{7\}, \{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}\big) \arrow[drr, dash] & & (\{6\}, \{\overline{r}, f, s, w\}) \arrow[d, dash] & & (\{5\}, \{f, \overline{r}, s, g\}) \arrow[dll, dash] \\
 & & (\varnothing, M) & &
\end{tikzcd}
$$

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*),

  $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и

  $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*)

  — являются $\oplus$—гипотезами;

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*),

  $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и

  $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*)

  — являются $\oplus$−гипотезами;

- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*)

  — является фальсифицированной $\oplus$−гипотезой, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);

Пример «Фрукты»: формирование гипотез

Формальные содержания

- $\{\overline{f}, \overline{r}\}$ (*мягкий, некруглый*),

  $\{\overline{f}, r, y\}$ (*мягкий, круглый, жёлтый*) и

  $\{\overline{f}, s\}$ (*мягкий, гладкий*)

  — являются $\oplus$**—гипотезами**;

- $\{\overline{f}, \overline{s}\}$ (*мягкий, шероховатый*)

  — является **фальсифицированной $\oplus$—гипотезой**, т.к. она — часть содержания $\{w, \overline{f}, \overline{s}, r\}$ отрицательного примера 7 (теннисный мяч);

- $\{w\}$ (*белый*) и

  $\{f, s, \overline{r}\}$ (*твёрдый, гладкий, некруглый*)

  — являются $\ominus$**—гипотезами**.

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- **мирабель** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* $\{\, y, \overline{f}, s \,\}$ содержит $\oplus$−гипотезу $\{\, \overline{f}, s \,\}$ и не содержит ни одной из $\ominus$−гипотез);

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- **мирабель** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* $\{\,y, \overline{f}, s\,\}$ содержит $\oplus$−гипотезу $\{\,\overline{f}, s\,\}$ и не содержит ни одной из $\ominus$−гипотез);

- **кусок сахара** со свойствам *белый*, некруглый, твёрдый будет классифицирован как *не-фрукт*;

Пример «Фрукты»: классификация

Неопределённый объект g

- **мирабель** будет классифицирован как *фрукт*, т.к. его формальное содержание *жёлтый, мягкий, гладкий* $\{y, \overline{f}, s\}$ содержит $\oplus$–гипотезу $\{\overline{f}, s\}$ и не содержит ни одной из $\ominus$–гипотез);

- **кусок сахара** со свойствам *белый*, некруглый, твёрдый будет классифицирован как *не-фрукт*;

- **брикет пломбира** со свойствами *белый, мягкий, некруглый* вызовет отказ от классификации, поскольку $g' = \{w, \overline{f}, \overline{r}\}$ содержит как положительную $\{\overline{f}, \overline{r}\}$, так и отрицательную $\{w\}$ гипотезы.

Пример «Фрукты»: дополнение

Если считать, что теннисный мяч — зелёный, то $\mathfrak{B}(K_{-})$:

$$
\begin{tikzcd}
 & (G_{-}, \varnothing) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
{\color{red}\overline{(\{5,7\},\{g\})}} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & {\color{blue}\underline{(\{5,6\},\{f,s,\overline{r}\})}} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\
(\{7\},\{g,\overline{f},\overline{s},r\}) \arrow[dr, dash] & (\{5\},\{\overline{r},f,s,g\}) \arrow[d, dash] & (\{6\},\{f,\overline{r},s,w\}) \arrow[dl, dash] \\
 & (\varnothing, M) &
\end{tikzcd}
$$

Пример «Фрукты»: дополнение...

При таком изменении свойств объекта № 7 изменятся только отрицательный контекст. Теперь

- $\{g\} = \{5,7\}'$ является фальсифицированной $\ominus$—гипотезой, поскольку она содержится в формальном содержании $\{g,\overline{f},\overline{s},\overline{r}\}$ положительного понятия $\{3\}$.
- $\{f,s,\overline{r}\} = \{5,6\}'$ является $\ominus$—гипотезой.

Пример «Фрукты»: дополнение...

При таком изменении свойств объекта № 7 изменятся только отрицательный контекст. Теперь

- $\{g\} = \{5,7\}'$ является фальсифицированной $\ominus$—гипотезой, поскольку она содержится в формальном содержании $\{g, \overline{f}, \overline{s}, \overline{r}\}$ положительного понятия $\{3\}$.
- $\{f, s, \overline{r}\} = \{5,6\}'$ является $\ominus$—гипотезой.

Поэтому

- объекты со свойствами *жёлтый, мягкий, гладкий* и *белый, мягкий, некруглый* будет классифицированы как *фрукт*;
- на объекте с единственным свойством *белый* произойдёт отказ от классификации.

Разделы

- Решёточно упорядоченное множество, алгебраические решётки и их эквивалентность. Примеры решёток. Условие для ч.у. множества являться полной решёткой.
- Неравенства полудистрибутивности и полумодулярности. Теорема о четырёх элементах.
- Идеалы решёток: определение, свойства, примеры. **Теорема о собственных идеалах решётки с единицей**.
- Теоремы о вложении решёток.
- Гомоморфизмы решёток, связь порядкового и решёточного гомоморфизмов. Сечения Макнила.
- Идеалы решёток.
- Модулярные решётки. Критерий модулярности решётки. Цепное условие Жордана–Дедекинда и модулярность. Правило сокращения.

- Дистрибутивные решётки. Критерий дистрибутивности решётки.
- Конгруэнции. Факторрешётки.
- Решётки с дополнениями и с относительными дополнениями: определение и свойства.
- Неразложимые элементы решёток и представление произвольных элементов решётки через неразложимые. Изоморфизм ч.у. множества и неразложимых элементов решётки его порядковых идеалов.
- **Фундаментальная теорема о конечных дистрибутивных решётках**.
- Задача классификация по прецедентам. Закон обратного отношения между содержанием и объёмом понятия. Соответствия Галуа.

- Анализ формальных понятий (АФП). Формальные объём и содержание. Решётка формальных понятий. Гипотезы АФП. Простейшее решающее правило классификации.