МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

Задачи по ТП для подготовки к экзамену по курсу

«Прикладная алгебра» (5 семестр, III поток, 2013/14 уч. год)

Задача № 1 (ТП)

Найдите порядок стабилизаторов произвольной (а) вершины, (б) ребра и (в) грани куба при действии группы октаэдра O на соответствующие элементы. Какие перестановки в них содержатся?

Решение.

(а) Пусть O действует на вершины куба и v — некоторая вершина.
Тогда $\mathrm{Stab}(v) \cong Z_3$ — группа вращений на 120° (в выбранном направлении) вокруг диагонали куба, проходящей через данную вершину (подгруппа O) и $|\,\mathrm{Stab}(v)| = 3$.

(б) Пусть O действует на рёбра куба и e — некоторое ребро.
Тогда $\mathrm{Stab}(e) \cong Z_2$ — группа вращений на 180° вокруг оси, проходящей через середины рёбер (данного и ему противоположного) куба (подгруппа O) и $|\,\mathrm{Stab}(e)| = 2$.

(в) Пусть O действует на грани куба и f — некоторая грань.
Тогда $\mathrm{Stab}(f) \cong Z_4$ — группа вращений на 90° (в выбранном направлении) вокруг вокруг оси, проходящей через середины граней (данной и ей противоположной) куба, (подгруппа O) и $|\,\mathrm{Stab}(v)| = 4$.

Задача № 2 (ТП)

Сколькими геометрически различными способами три абсолютно одинаковые мухи могут усесться в вершинах правильного семиугольника, нарисованного на листе бумаги?

Решение.
Множество T — вершины семиугольника, на которые действует группа $Z_7 = \langle\, t\,\rangle,\ t^7 = e$.

Элемент $g \in Z_7$	$Type(g)$	$w(g)$
e	$\langle\, 7,\, 0,\, \ldots\,\rangle$	x_1^7
$t,\, t^2,\, \ldots,\, t^6$	$\langle\, 0,\, \ldots,\, 1\,\rangle$	x_7
		7

Цикловой индекс: $P(Z_7) = \dfrac{1}{7}\big[\, x_1^7 + 6x_7\,\big]$.

Число различных раскрасок в 2 цвета (муха есть/нет), при условии окраски ровно 3-х вершин из 7-и — коэффициент u_3 при y^3 после подстановки $x_1 \mapsto y+1,\ x_7 \mapsto y^7+1$ в $P(Z_7)$:

$$W \;=\; \frac{1}{7}\left[\,(y+1)^7 + 6(y+1)\,\right] \;=\; \frac{1}{7}\left[\ldots + \binom{7}{3} y^3 + \ldots\right].$$

$$u_3 \;=\; \frac{7!}{7\cdot 3!\cdot 4!} \;=\; \frac{5\cdot 6}{3!} \;=\; 5.$$

Задача № 3 (ТП)

Определить число различных раскрасок граней 4-х угольной пирамиды в 3 цвета.

Задача № 4 (ТП)

Найти цикловой индекс группы симметрии правильного треугольника.

Задача № 5 (ТП)

Сколько различных ожерелий можно составить из 7-ми круглых бусин двух цветов (красного и синего).

Решение.
Задача может быть перреформулировна: сколькими различными способами можно раскрасить вершины правильного семиугольника в два цвета?

Группа симметрии правильного семиугольника — группа диэдра: $D_7 \;=\; \langle\, t,\ f\,\rangle\,,\ t^7 \;=\; f^2 \;=\; e\,,\ |D_7| \;=\; 2\cdot 7 \;=\; 14.$

$$D_7 \;=\; \langle\, e,\, t,\, t^2,\, t^3,\, t^4,\, t^5,\, t^6,\, f,\, tf,\, t^2f,\, t^3f,\, t^4f,\, t^5f,\, t^6f\,\rangle.$$

Действует она на вершины правильного семиугольника — т.е. имеет место транзитивное самодействие.

Элемент $g \in D_7$	$Type(g)$	$w(g)$
e	$\langle 7,\, 0,\, \ldots\rangle$	x_1^7
$t,\, t^2,\, \ldots,\, t^6$	$\langle 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1\,\rangle$	x_7
$f,\, tf,\, \ldots,\, t^6f$	$\langle 1,\, 3,\, 0,\, \ldots\rangle$	$x_1x_2^3$

Цикловой индекс: $P_{D_7} \;=\; \dfrac{1}{14}\left[\,x_1^7 + 6x_7 + 7x_1x_2^3\,\right].$

Число различных раскрасок в r цветов — $\dfrac{1}{14}\left[\,r^7 + 6r + 7r^4\,\right].$

Для $r = 2$ имеем $\quad \dfrac{1}{14}\left[\,2^7 + 12 + 7\cdot 16\,\right] \;=\; \dfrac{128+12+112}{14} \;=\; \dfrac{252}{14} \;=\; 18$

Задача № 6 (ТП)

Найти число различных вариантов раскраски вершин тетраэдра в 2 и 3 цвета.

Решение.
Группа вращений тетраэдра — $T \;=\; \langle\, t,\ f\,\rangle,\ t^3 \;=\; f^2 \;=\; e,\ |T| = n = 12$, где

t — вращение на $120°$ вокруг оси, проходящей через центр грани и противоположную вершину тетраэдра, $\langle t\rangle \cong Z_3$, всего таких осей — 4;
f — вращение на $180°$ вокруг оси, проходящей через середины противоположных рёбер, $\langle f\rangle \cong Z_2$, всего таких осей — 3.

$$T = \langle\, e,\, t,\, t^2,\, f,\, tf,\, t^2f,\, ft,\, ft^2,\, t^2f,\, t^2ft,\, tft,\, tft^2 \,\rangle.$$

Обозначим через V множество граней тетраэдра; $|V| = N = 4$ (в силу самодвойственности тетраэдра можно решать задачу раскраски его граней). Перенумеруем грани тетраэдра цифрами 1, 2, 3 и 4 и считаем, что ось вращения, задаваемого элементом группы t проходит через центр грани 1.

Элемент $g \in T$	$Type(g)$	$w(g)$	Кол-во
$e = (1)(2)(3)(4)$	$\langle\, 4,\, 0,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_1^4	1
$t = (1)(234)$	$\langle\, 1,\, 0,\, 1,\, 0\,\rangle$	x_1x_3	8
$f = (12)(34)$	$\langle\, 0,\, 2,\, 0,\, 0\,\rangle$	x_2^2	3
			12

Цикловой индекс: $P(T \underset{\alpha}{:} V) = \dfrac{1}{12}\left[\, x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\,\right].$

$\#Col(2) = \dfrac{2^4 + 11\cdot 2^2}{12} = \dfrac{16+44}{12} = 5\,.$ $\#Col(3) = \dfrac{3^4 + 11\cdot 3^2}{12} = \dfrac{81+99}{12} = 15\,.$

Задача № 7 (ТП)

Найти число различных вариантов раскраски вершин куба в 2 и 3 цвета.

Задача № 8 (ТП)

Найти цикловой индекс группы симметрии правильного n-угольника (группы диэдра) D_n.

Задача № 9 (ТП)

Имеются плоские бусины, окрашенные с одной стороны в красный, синий и зелёный цвета. Из них составляют ожерелья, содержащие по 6 в равноотстоящих точках окружности. Определить

а) число различных 2-х и 3-х цветных ожерелий;
б) число цветных ожерелий с одной красной бусиной?

Решение.
Здесь везде — транзитивное самодействие циклической группы из 6 элементов.

а) Общее число ожерелий.
$|T| = N = 6\,,\ G \cong Z_6 = \langle\, g \,\rangle\,,\ g^6 = e.$

$$P(Z_6) \;=\; \frac{1}{6} \sum_{d\colon d|6} \varphi(d)\, x_d^{6/d} \;\boxed{=}$$

$$d \;=\; 1,\, 2,\, 3,\, 6\,. \quad \varphi(1) = \varphi(2) = 1,\, \varphi(3) = \varphi(6) = 2\,.$$

$$\boxed{=}\;\; \frac{1}{6} \left[\, x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6 \,\right] \;=\; W(x_1, \ldots, x_6).$$

$$r = 2 \text{ цвета } \;\Rightarrow\; x_k = 2;\; k \;=\; 1,\, 2,\, \ldots,\, 6\,.$$

$$\#Col(2) \;=\; \frac{1}{6} \left[2^6 + 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2\right] \;=\; \frac{84}{6} \;=\; 14.$$

$$r = 3 \text{ цвета } \;\Rightarrow\; x_k = 3;$$

$$\#Col(3) \;=\; \frac{1}{6} \left[3^6 + 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3\right] \;=\; \frac{780}{6} \;=\; 130.$$

б) Полагаем $y_1 = y\,,\ y_2 = y_3 = 1$ (следим только за бусинами красного цвета, которому отвечает y_1). Найдём коэффициент u_1 при подстановке

$$x_1 = y + 2, \quad x_2 = y^2 + 2, \quad x_3 = y^3 + 2.$$

$$W \;=\; \frac{1}{6}\Big[\, (y{+}2)^6{+}(y^2{+}2)^3{+}2(y^3{+}2)^2{+}2(y^6{+}2) \,\Big] \;=\; \frac{1}{6}\Big[\, u_0{+}u_1 y{+}u_2 y^2{+}\ldots{+}u_6 y^6 \,\Big] \;=$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\, \ldots + 6 \cdot 2^5 y + \ldots + u_6 y^6 \,\Big]\,.$$

Число ожерелий с ровно одной красной бусиной — $u_1 = 32$.

Задача № 10 (ТП)

Для раскраски сторон квадрата на стеклянной пластинке используют 3 цвета — красный, синий и зелёный. Сколько можно получить

1) разнораскрашенных квадратов?
2) квадратов с одним красным ребром и не более 2-х синих?