

# Применение алгоритма Expectation Propagation на примере модели TrueSkill™

Александр Чистяков

31 октября 2014

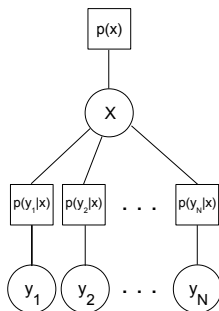
- 1 Построение аппроксимации для сложных одномерных распределений с помощью алгоритма Expectation Propagation;
- 2 Сведение задачи аппроксимации многомерных распределений к передаче сообщений;
- 3 Выбор метрики для аппроксимации;
- 4 Построение расписаний для передачи сообщений на примере модели TrueSkill.

# Модель с одной скрытой переменной: Clutter problem

Найти распределение на источник  $x$  по выборке  $\{y_1, y_2, \dots\}$

$$p(x) = \mathcal{N}(x; 0, 100)$$

$$p(y_i|x) = (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; x, 1) + (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; 0, 10)$$



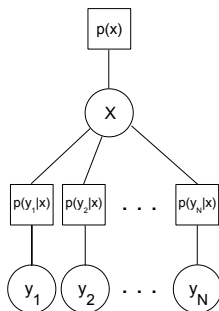
$$p(x|y_1, y_2, \dots, y_N) \propto p(x) \cdot p(y_1|x) \cdot p(y_2|x) \cdot \dots \cdot p(y_N|x)$$

# Модель с одной скрытой переменной: Clutter problem

Найти распределение на источник  $x$  по выборке  $\{y_1, y_2, \dots\}$

$$p(x) = \mathcal{N}(x; 0, 100)$$

$$p(y_i|x) = (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; x, 1) + (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; 0, 10)$$



$$p(x|y_1, y_2, \dots, y_N) \propto p(x) \cdot p(y_1|x) \cdot p(y_2|x) \cdot \dots \cdot p(y_N|x)$$

**Проблема:**

$p(x|Y)$  — смесь  $2^N$  гауссиан!

Исходное распределение:  $p(x|Y) = \prod_{i=0}^N f_i(x)$

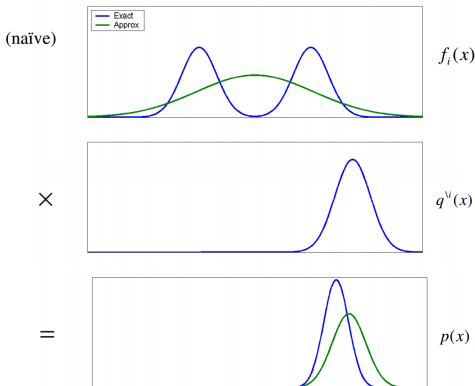
Аппроксимированное распределение:  $p(x|Y) \approx \prod_{i=0}^N \hat{f}_i(x)$ ,  $\hat{f}_i \in \mathcal{F}$

**Главная идея:**

$$\prod_{i=0}^N f_i(x) \approx \prod_{i=0}^N \hat{f}_i(x) \quad \not\Rightarrow \quad \{f_i(x) \approx \hat{f}_i(x)\}_{i=0}^N$$

# Аппроксимация факторов распределения

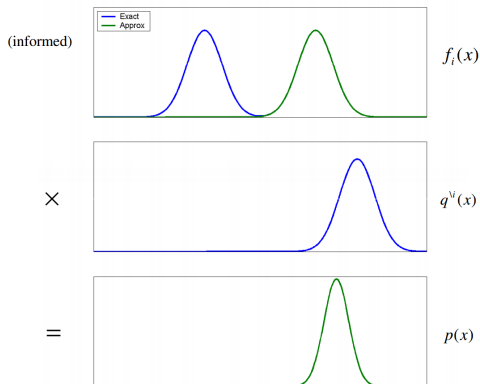
$$f_i(x) = (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; x, 1) + (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; 0, 10) \approx \mathcal{N}(x; m_i, v_i)$$
$$\{f_i(x) \approx \hat{f}_i(x)\}_{i=0}^N$$



# Аппроксимация факторов распределения

$$f_i(x) = (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; x, 1) + (0.5) \cdot \mathcal{N}(y_i; 0, 10) \approx \mathcal{N}(x; m_i, v_i)$$

$$\prod_{i=0}^N f_i(x) \approx \prod_{i=0}^N \hat{f}_i(x)$$



# Адаптивная фильтрация плотности

$f_i(x)$  — произвольная функция;

$\hat{f}_i(x)$  — гауссиана;

$q^{i}(x) = \prod_{k \neq i} \hat{f}_k(x)$  — гауссиана

$$\hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x) \approx \hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x)$$



# Адаптивная фильтрация плотности

$f_i(x)$  — произвольная функция;

$\hat{f}_i(x)$  — гауссиана;

$q^{i}(x) = \prod_{k \neq i} \hat{f}_k(x)$  — гауссиана

$$\hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x) \approx \hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x)$$

Пусть  $proj[p(x)] = q(x) : q \in \mathcal{F}, q(x) \approx p(x)$ :

$$\hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x) = proj \left[ \hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x) \right]$$

$$\hat{f}_i(x) = \frac{proj \left[ \hat{f}_i(x) \cdot q^{i}(x) \right]}{q^{i}(x)}$$

$$\mathcal{N}(x; m_1, v_1)\mathcal{N}(x; m_2, v_2) = \mathcal{N}(m_1; m_2, v_1 + v_2)\mathcal{N}(x; m, v)$$

$$\text{где } v = \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)^{-1}$$

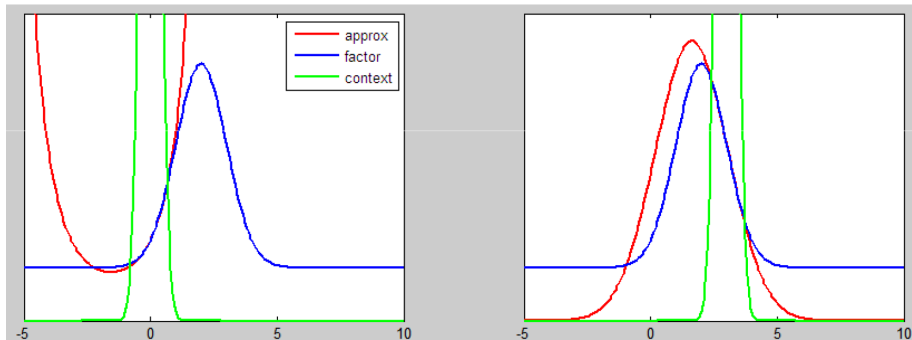
$$m = v \left(\frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2}\right)$$

$$\mathcal{N}(x; m_1, v_1)/\mathcal{N}(x; m_2, v_2) = \frac{v_2\mathcal{N}(x; m, v)}{(v_2 - v_1)\mathcal{N}(m_1; m_2, v_2 - v_1)}$$

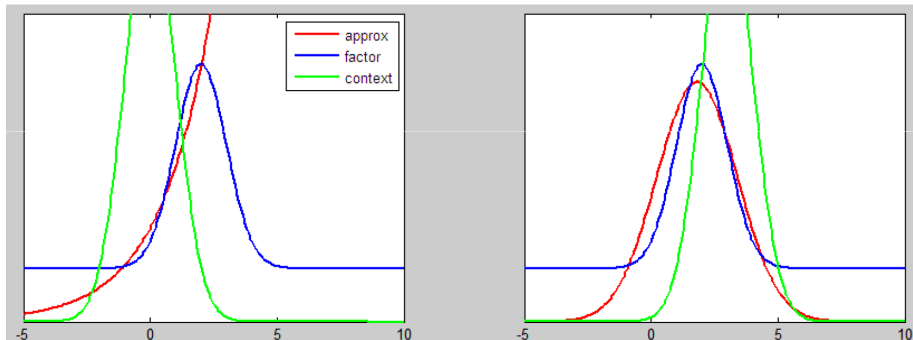
$$\text{где } v = \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right)^{-1}$$

$$m = v \left(\frac{m_1}{v_1} - \frac{m_2}{v_2}\right)$$

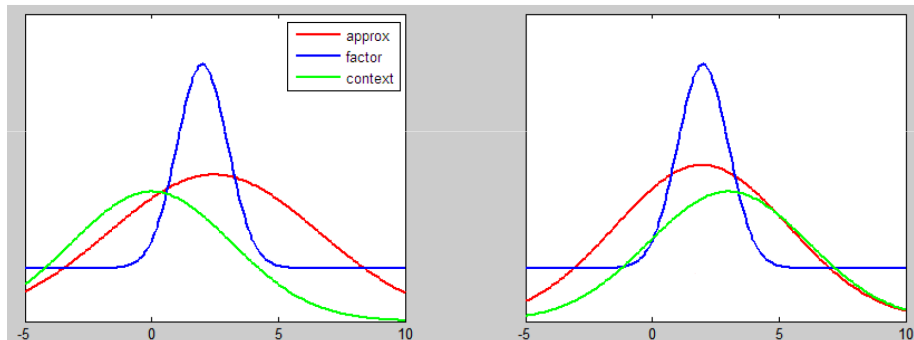
# Аппроксимация на узком участке



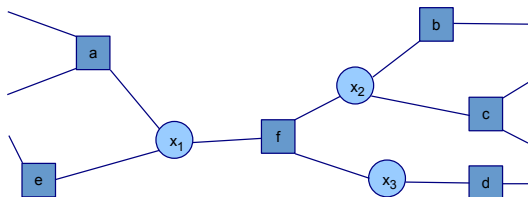
# Аппроксимация на среднем участке



# Аппроксимация на широком участке



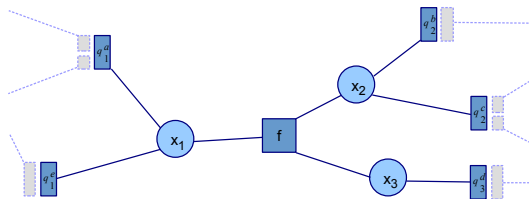
# Аппроксимация модели с несколькими переменными



$$p(X) \propto \prod_i f_i(X_i) \approx \prod_i \hat{f}_i(X_i) = \prod_i \left( \prod_{x_j \in X_i} q_j^i(x_j) \right) = \prod_j Q_j(x_j)$$

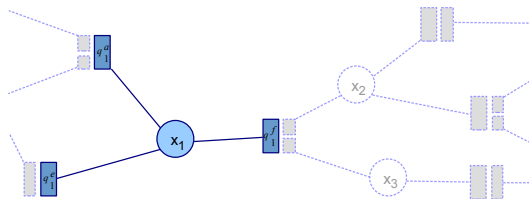
$$p(x_1) = \int \prod_i f_i(X_i) dX^{\setminus 1}$$

# Аппроксимация модели с несколькими переменными



$$\begin{aligned} p(x_1) &\approx \int \int f(x_1, x_2, x_3) [q_1^a(x_1)q_1^e(x_1)] [q_2^b(x_2)q_2^c(x_2)] [q_3^d(x_3)] dx_2 dx_3 = \\ &= \int \int f(x_1, x_2, x_3) m_{x_1 \rightarrow f}(x_1) m_{x_2 \rightarrow f}(x_2) m_{x_3 \rightarrow f}(x_3) dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

# Аппроксимация модели с несколькими переменными



$$p(x_1) \approx q_1^f(x_1)[q_1^a(x_1)q_1^e(x_1)] = q_1^f(x_1)m_{x_1 \rightarrow f}(x_1)$$

$$\begin{aligned} q_1^f(x_1)m_{x_1 \rightarrow f}(x_1) &= \\ &= \text{proj} \left[ \int \int f(x_1, x_2, x_3)m_{x_1 \rightarrow f}(x_1)m_{x_2 \rightarrow f}(x_2)m_{x_3 \rightarrow f}(x_3)dx_2dx_3 \right] \end{aligned}$$



# Loopy Belief Propagation (LBP)

Алгоритм передачи сообщений в фактор-графе.

Сообщения из фактора в переменную:

$$m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j) = \int f(X_i) \prod_{x_k \in X_i^{\setminus j}} m_{x_k \rightarrow f_i}(x_k) dX_i^{\setminus j}$$

Сообщения из переменной в фактор:

$$m_{x_j \rightarrow f_i}(x_j) = \prod_{k \neq i} m_{f_k \rightarrow x_j}(x_j)$$

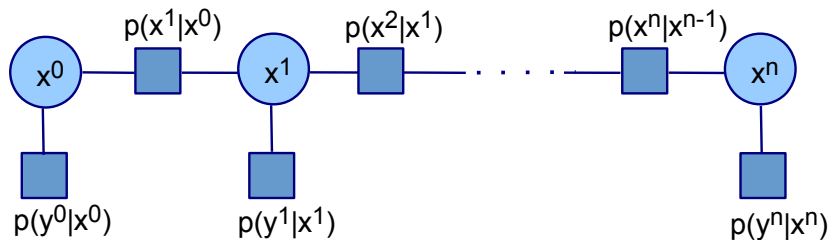
Маргинальное распределение переменной:

$$p(x_j) = \prod_{i: X_i \ni x_j} m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j)$$

# Сравнение LBP и EP

	LBP	EP
$m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j)$	$\int f(X_i) \prod_{x_k \in X_i^{\setminus j}} m_{x_k \rightarrow f_i}(x_k) dX_i^{\setminus j}$	$\frac{\text{proj} \left[ \int f(X_i) \prod_{x_k \in X_i} m_{x_k \rightarrow f_i}(x_k) dX_i^{\setminus j} \right]}{m_{x_j \rightarrow f_i}(x_j)}$
$m_{x_j \rightarrow f_i}(x_j)$	$\prod_{k \neq i} m_{f_k \rightarrow x_j}(x_j)$	
$p(x_j)$	$\prod_{i: X_i \ni x_j} m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j)$	

Если для всех сообщений  $\text{proj}[p(x_j)]$  совпадает с  $p(x_j)$ , то алгоритм Expectation Propagation вырождается в Loopy Belief Propagation.



Если вычисление сообщений производится приближённо, поведение алгоритмов EP и LBP на графах-деревьях начинает отличаться.

①  $proj[p] = \arg \min_{q \in \mathcal{F}} KL(p \parallel q)$

②  $proj[p] = \arg \min_{q \in \mathcal{F}} D_\alpha(p \parallel q)$

$$D_\alpha(p \parallel q) = \frac{\int_x \alpha p(x) + (1-\alpha)q(x) - p(x)^\alpha q(x)^{1-\alpha} dx}{\alpha(1-\alpha)}$$

- $D_{-1}(p \parallel q) = \frac{1}{2} \int_x \frac{(q(x)-p(x))^2}{p(x)} dx$

- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} D_\alpha(p \parallel q) = KL(q \parallel p)$

- $D_{1/2}(p \parallel q) = 2 \int_x \left( \sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)} \right)^2 dx$

- $\lim_{\alpha \rightarrow 1} D_\alpha(p \parallel q) = KL(p \parallel q)$

- $D_2(p \parallel q) = \frac{1}{2} \int_x \frac{(p(x)-q(x))^2}{q(x)} dx$

③  $proj[p] = \arg \max_{q \in \mathcal{F}} \prod_{i=1}^{N_p} q(x_i); \quad \{x_i\}_{i=1}^{N_p} = \text{Sample}(p)$

④ Любая другая разумная аппроксимация...

## Экспоненциальное семейство распределений:

$$p(x|\theta) = \frac{1}{Z(\theta)} \exp(\theta^T g(x))$$

$$\theta = [\theta_1; \dots; \theta_n], \quad g(x) = [g_1(x); \dots; g_n(x)]$$

Распределение	Плотность	$g(x)$	$\theta$
Бернулли	$q^x(1-q)^{1-x}$	$x$	$\ln \frac{q}{1-q}$
Нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$[x, x^2]$	$[\frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}]$
Гамма	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx)$	$[\ln(x), x]$	$[a-1, -b]$
Бета	$\frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$[\ln(x), \ln(1-x)]$	$[a-1, b-1]$
Пуассон	$\exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!}$	$[x, \ln \Gamma(x+1)]$	$[\ln(\lambda), -1]$
...	...	...	...

$$\frac{p(x|\theta_1) \dots p(x|\theta_k)}{p(x|\theta_{k+1}) \dots p(x|\theta_K)} = p\left(x \mid \theta = \sum_{i=1}^k \theta_i - \sum_{i=k+1}^K \theta_i\right)$$

## Утверждение 1

Пусть  $q(x)$  принадлежит экспоненциальному семейству:

$q(x) = \frac{1}{Z(\theta)} \exp\left(\sum_{i=1}^d \theta_i g_i(x)\right)$ . Тогда  $\frac{\partial \log Z(\theta)}{\partial \theta_j} = \mathbb{E}_q g_j(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log Z(\theta)}{\partial \theta_j} &= \frac{1}{Z(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_j} Z(\theta) = \frac{1}{Z(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \int_x \exp\left(\sum_{i=1}^d \theta_i g_i(x)\right) dx = \\ &= \frac{1}{Z(\theta)} \int_x g_j(x) \exp\left(\sum_{i=1}^d \theta_i g_i(x)\right) dx = \int_x g_j(x) q(x) dx = \mathbb{E}_q g_j(x) \end{aligned}$$

## Утверждение 2

Пусть  $q(x)$  принадлежит экспоненциальному семейству. Тогда  $q = \arg \min_q KL(p \parallel q) \Leftrightarrow \mathbb{E}_p g_j(x) = \mathbb{E}_q g_j(x) \quad \forall j = 1 \dots d$

$$\begin{aligned} KL(p \parallel q) &= \int_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx = \text{const} - \int_x p(x) \log q(x) dx = \\ &= \text{const} + \int_x p(x) \log Z(\theta) dx - \int_x p(x) \sum_{i=1}^d \theta_i g_i(x) dx = \\ &= \text{const} + \log Z(\theta) - \sum_{i=1}^d \theta_i \int_x p(x) g_i(x) dx \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} KL(p \parallel q) = \mathbb{E}_q g_j(x) - \mathbb{E}_p g_j(x) = 0 \quad \forall j = 1 \dots d$$

## Утверждение 3

Пусть распределение  $q_\theta(x)$  непрерывно зависит от параметра  $\theta$ .

Тогда, если  $\alpha \neq 0$ :

$\hat{\theta}$  особая точка  $D_\alpha(p(x) \parallel q_{\hat{\theta}}(x)) \iff$

$\hat{\theta}$  особая точка  $KL(p(x)^\alpha q_{\hat{\theta}}(x)^{1-\alpha} \parallel q_{\hat{\theta}}(x))$

Доказательство: [Minka, 2005]

**Минимизация  $D_\alpha(p \parallel q)$ :**

$q'(x) = \arg \min_{q'} KL(p(x)^\alpha q(x)^{1-\alpha} \parallel q'(x))$

$q(x)^{new} = q(x)^\varepsilon q'(x)^{1-\varepsilon}$



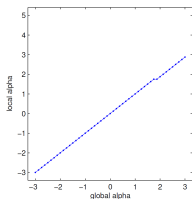
## Утверждение 4

Если  $proj[p] = \arg \min_q KL(q \parallel p)$ , то минимизация локальной дивергенции в алгоритме передачи сообщений соответствует поиску особых точек функционала глобальной дивергенции.

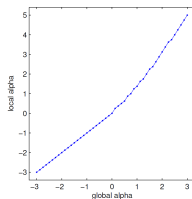
Доказательство: [Minka, 2005].

**Пример:** Модель Изинга  $4 \times 4$ .

$$f_i(x_i) = \begin{bmatrix} \exp(\theta_{i1}) \\ \exp(\theta_{i2}) \end{bmatrix}; \quad f_{ij}(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} 1 & \exp(w_{ij}) \\ \exp(w_{ij}) & 1 \end{bmatrix}$$



$$w_{ij} \sim U(-1, 1)$$



$$w_{ij} = 1$$

## Мотивация:

- Автоматическая оценка навыков игрока на основе статистических данных;
- Подбор равных по силе игроков в для повышения интереса участников состязаний.

## Требования:

- Мастерство игроков изменяется со временем;
- Игроки участвуют как в личных, так и командных соревнованиях;
- В одной игре может соревноваться произвольное число команд;
- Игра допускает возможность возникновения ничьих;
- Требуется обрабатывать большие и непрерывно растущие объёмы данных.

Рейтинг игрока:  $s_i \in \mathbb{R}$

Результативность игрока:  $p_i \sim \mathcal{N}(p_i; s_i, \beta^2)$

Обновление рейтинга:

$$\begin{aligned} s_1 &\leftarrow s_1 + y\Delta \\ s_2 &\leftarrow s_2 - y\Delta \\ \Delta &= \alpha\beta\sqrt{\pi} \left( \frac{y+1}{2} - \Phi \left( \frac{s_1 - s_2}{\sqrt{2}\beta} \right) \right), \quad y \in \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

Мастерство игрока:

$$s_i^0 \sim \mathcal{N}(s_i^0; \mu_0, \gamma_0^2)$$
$$s_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(s_i^{t+1}; s_i^t, \gamma^2)$$

Результативность игрока:

$$p_i \sim \mathcal{N}(p_i; s_i, \beta^2)$$

Результативность команды:

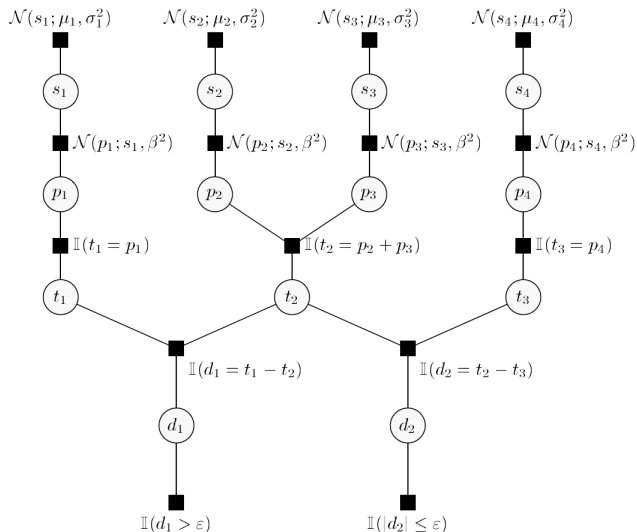
$$t_k = \sum_{i \in T_k} p_i$$

Превосходство команды  $a$  над  $b$ :

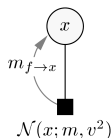
$$d_{ab} = t_a - t_b$$

Результат игры:

- Команда  $a$  победила команду  $b$ :  $\mathbb{I}[d_{ab} > \varepsilon] = 1$
- Ничья между командами  $a$  и  $b$ :  $\mathbb{I}[|d_{ab}| \leq \varepsilon] = 1$



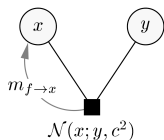
$$m_{f \rightarrow x_j}(x_j) = \frac{\text{proj} \left[ \int f(X_i) \prod_{x_k \in X_i} m_{x_k \rightarrow f}(x_k) dX_i \right]}{m_{x_j \rightarrow f}(x_j)}$$

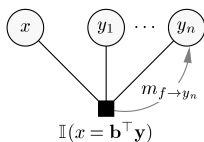
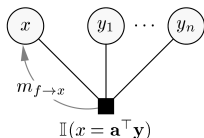


$$\mathbf{m}_{f \rightarrow x} = \frac{\text{proj} [\mathcal{N}(x; m, v^2) m_{x \rightarrow f}]}{m_{x \rightarrow f}} = \mathcal{N}(x; m, v^2)$$

$$m_{f \rightarrow x_j}(x_j) = \frac{\text{proj} \left[ \int f(X_i) \prod_{x_k \in X_i} m_{x_k \rightarrow f}(x_k) dX_i \right]}{m_{x_j \rightarrow f}(x_j)}$$

$$\begin{aligned} m_{f \rightarrow x}(x) &= \frac{\text{proj} \left[ m_{x \rightarrow f} \int \mathcal{N}(x; y, c^2) m_{y \rightarrow f} dy \right]}{m_{x \rightarrow f}} = \\ &= \frac{\text{proj} \left[ m_{x \rightarrow f} \int \mathcal{N}(y; x, c^2) \mathcal{N}(y; m_y, v_y^2) dy \right]}{m_{x \rightarrow f}} = \\ &= \frac{\text{proj} \left[ m_{x \rightarrow f} \mathcal{N}(x; m_y, c^2 + v_y^2) \int \mathcal{N}(y; \hat{m}, \hat{v}^2) dy \right]}{m_{x \rightarrow f}} = \\ &= \mathcal{N}(x; m_y, v_y^2 + c^2) \end{aligned}$$



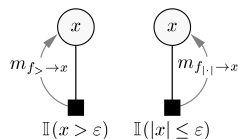


$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_{f \rightarrow x} &= \frac{\text{proj} \left[ m_{x \rightarrow f} \int_{\mathbb{I}[x = \mathbf{a}^T \mathbf{y}]} \prod_{i=1}^n m_{y_i \rightarrow f} d\mathbf{y} \right]}{m_{x \rightarrow f}} \\
 &= \frac{\text{proj} \left[ m_{x \rightarrow f} \mathcal{N} \left( x; \sum_{i=1}^n a_i m_{y_i}, \sum_{i=1}^n a_i^2 v_{y_i}^2 \right) \right]}{m_{x \rightarrow f}} \\
 &= \mathcal{N} \left( x; \sum_{i=1}^n a_i m_{y_i}, \sum_{i=1}^n a_i^2 v_{y_i}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{I}[x = \mathbf{b}^T \mathbf{y}] = \mathbb{I}[y_n = \mathbf{a}^T [y_1, \dots, y_{n-1}, x]]$$

$$\mathbf{a}^T = \frac{1}{b_n} [-b_1, \dots, -b_{n-1}, +1]$$





$$\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{x}} = \frac{\text{proj} [\mathcal{N}(x; m, \sigma^2) \mathbb{I}_i(x)]}{\mathcal{N}(x; m, \sigma^2)}$$

$$\mathbb{I}_1(x) = \mathbb{I}(x > \varepsilon) \quad \mathbb{I}_2(x) = \mathbb{I}(|x| \leq \varepsilon)$$

$$\text{proj} [\mathcal{N}(x; m, \sigma^2) \mathbb{I}_i(x)] = \mathcal{N}(x; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2)$$

$$\mathbb{E}_{q_i} x = \hat{\mu}_i = \mathbb{E}_{p_i} x$$

$$\mathbb{E}_{q_i} x^2 = \hat{\mu}_i^2 + \hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{E}_{p_i} x^2$$

$$\begin{aligned}M_1^0 &= Z_{p_1} = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \left\{t = \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \\ &= \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_1^1 &= Z_{p_1} \mathbb{E}_{p_1} x = \int_{\varepsilon}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \left\{t = \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \\ &= \sigma \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} d\frac{t^2}{2} + \mu \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \sigma^2 \mathcal{N}(\varepsilon; \mu, \sigma^2) + \mu \left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_1^2 &= Z_{p_1} \mathbb{E}_{p_1} x^2 = \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \left\{ t = \frac{x-\mu}{\sigma} \right\} = \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + 2\sigma\mu \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \left[ t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \right] dt + 2\sigma^2 \mu \mathcal{N}(\varepsilon; \mu, \sigma^2) + \mu^2 M_1^0 = \\
 &= \sigma^2 \left[ -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}}^{+\infty} \right] + 2\sigma^2 \mu \mathcal{N}(\varepsilon; \mu, \sigma^2) + (\mu^2 + \sigma^2) M_1^0 = \\
 &= \sigma^2 (\varepsilon + \mu) \mathcal{N}(\varepsilon; \mu, \sigma^2) + (\mu^2 + \sigma^2) \left( 1 - \Phi \left( \frac{\varepsilon - \mu}{\sigma} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$M_2^0$ ,  $M_2^1$ ,  $M_2^2$  вычисляются аналогично:

$$M_2^0 = M_1^0(-\varepsilon) - M_1^0(\varepsilon)$$

$$M_2^1 = M_1^1(-\varepsilon) - M_1^1(\varepsilon)$$

$$M_2^2 = M_1^2(-\varepsilon) - M_1^2(\varepsilon)$$

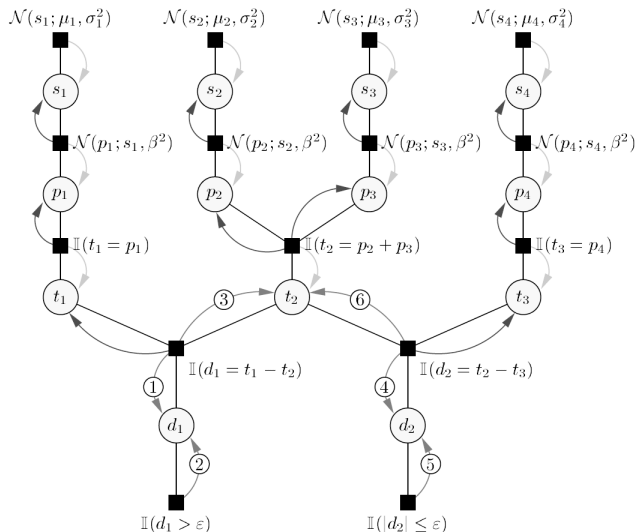
В результате:

$$\hat{\mu}_i = \mathbb{E}_{p_i} x = M_i^1 / M_i^0$$

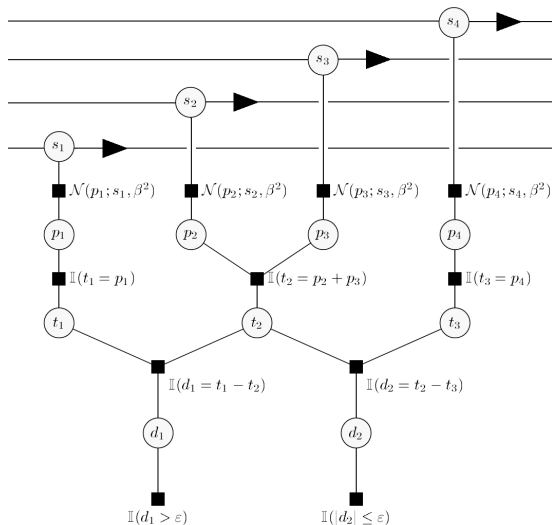
$$\hat{\mu}_i^2 + \hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{E}_{p_i} x^2 = M_i^2 / M_i^0$$

$$m_{f_i \rightarrow x} = \frac{\mathcal{N}(x; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2)}{\mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2)}$$

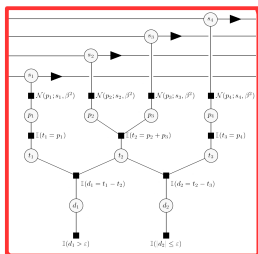
# TrueSkill: передача сообщений



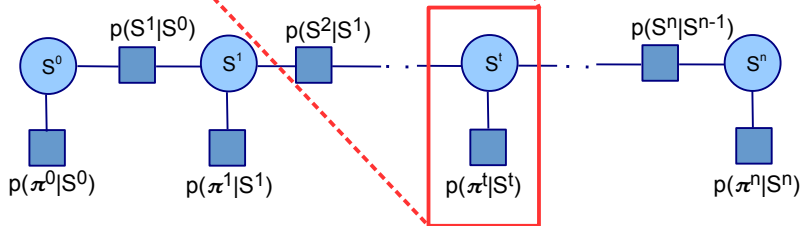
# TrueSkill Through Time (TTT)



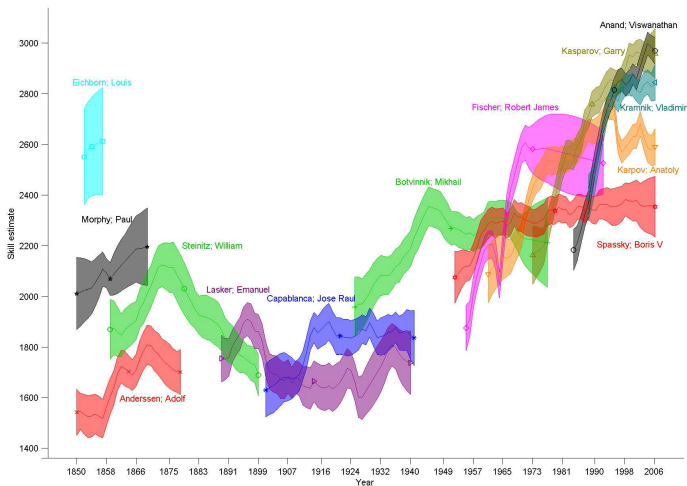
# TrueSkill Through Time (TTT)



$$S^t = \{ S_i^t \}_{i=1}^N$$



# TrueSkill Through Time для ранжирования шахматистов



206 059 игроков, 3 505 366 партий



# TTT with Individual Draw Margins (TTT-D)

Мастерство игрока:

$$s_i^0 \sim \mathcal{N}(s_i^0; \mu_0, \tau_0^2) \quad \varepsilon_i^0 \sim \mathcal{N}(\varepsilon_i^0; \nu_0, \varsigma_0^2) \mathbb{I}(\varepsilon_i^0 > 0)$$

$$s_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(s_i^{t+1}; s_i^t, \tau^2) \quad \varepsilon_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(\varepsilon_i^{t+1}; \varepsilon_i^t, \varsigma^2) \mathbb{I}(\varepsilon_i^{t+1} > 0)$$

Результативность игрока:

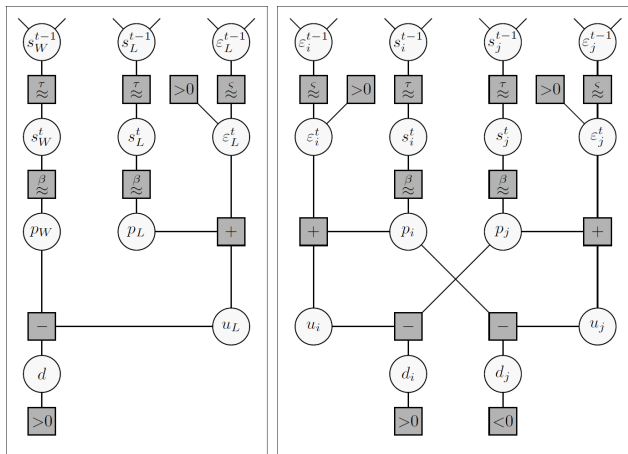
$$p_i \sim \mathcal{N}(p_i; s_i, \beta^2)$$

Результат игры:

- Игрок  $a$  победил игрока  $b$ :  $\mathbb{I}[p_a^t > p_b^t + \varepsilon_b^t] = 1$
- Игрок  $b$  победил игрока  $a$ :  $\mathbb{I}[p_b^t > p_a^t + \varepsilon_a^t] = 1$
- Ничья между игроками  $a$  и  $b$ :  $\mathbb{I}[-\varepsilon_a^t \leq p_a^t - p_b^t \leq \varepsilon_b^t] = 1$

# TTT-D: фактор-граф для одной партии

- Игрок  $W$  победил игрока  $L$  (слева)
- Игрок  $I$  сыграл вничью с игроком  $J$  (справа)



## Достоинства:

- 1 Позволяет хорошо аппроксимации сложные непрерывные распределения;
- 2 Возможность online-обучения (доставление фактор-графа во время работы алгоритма);
- 3 Большая свобода в выборе аппроксимирующего семейства и метрики аппроксимации;
- 4 Возможность комбинирования точных и аппроксимированных вычислений при расчёте одной вероятностной модели;
- 5 Легко адаптируется для проведения параллельных вычислений.

## Недостатки:

- 1 Слабые теоретические гарантии точности аппроксимации;
- 2 Слабые гарантии по сходимости алгоритма;
- 3 Не всегда ясно как стоит выбрать аппроксимирующее семейство и метрику;
- 4 В некоторых случаях вычисления становятся слишком трудозатратными.



T. Minka

Expectation propagation for approximate bayesian inference

In *Expectation propagation for approximate bayesian inference*, pages 362-369, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2001.



T. Minka

Divergence measures and message passing

Technical Report MSR-TR-2007-173, Microsoft Research Ltd., 2005



R. Herbrich, T. Minka, and T. Graepel.

TrueSkill(TM): A Bayesian skill rating system.

In *Advances in Neural Information Processing Systems 20*, pages 569-576, 2007.



P. Dangauthier, R. Herbrich, T. Minka, and T. Graepel.

Trueskill through time: Revisiting the history of chess.

In *Advances in Neural Information Processing Systems 20*, pages 337-344, 2008.