Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математических методов прогнозирования

АРБУЗОВА Дарья Андреевна

Построение дизъюнктивных нормальных форм для специальных классов булевых функций

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., академик РАН
Ю. И. Журавлёв

Москва, 2015

Содержание

Введение **3**

Построение дизъюнктивных нормальных форм **4**

Глава 1. Обзор существующих подходов **4**

§1.1 Построение ДНФ по формуле С. В. Яблонского 4

§1.2 Метод Журавлёва – Когана 5

§1.3 Метод Дьяконова 6

Глава 2. Метод разбиения на полосы **8**

§2.1 Способы разбиения строк матрицы нулей 8

§2.2 Оценка длины ДНФ 10

Глава 3. Построение тупиковой ДНФ **13**

§3.1 Проверка поглощения конъюнкции 13

§3.2 Очередь проверки 14

Глава 4. Критерий поглощения и алгоритм Блейка **16**

§4.1 Тривиальный случай 18

§4.2 Случай одной переменной 18

§4.3 Случай двух переменных 18

§4.4 Поглощение в методе Блейка 29

Глава 5. Сравнение методов поточечного покрытия и критерия поглощения **31**

Глава 6. Поиск нуля функции **33**

Заключение **37**

Список литературы **38**

Введение

В работе изучаются методы построения дизъюнктивных нормальных форм булевых функций и проблемы, связанные с трудностью построения достаточно простых ДНФ. Алгоритм построения таких ДНФ принято называть алгоритмом минимизации булевых функций. При этом не требуется, как правило, построения формулы наименьшей сложности, что, по-видимому, невыполнимо в классе достаточно простых алгоритмов [4]. Последнее показывают работы С. В. Яблонского, Ю. И. Журавлёва, Ю. Л. Васильева, А. А. Сапоженко, В. В. Глаголева и других отечественных и зарубежных учёных.

При такой минимизации типичным является метод, когда на первом этапе строится сокращённая ДНФ, а затем из неё удаляются «лишние» конъюнкции. Под лишними понимаются конъюнкции, соответствующие интервалы которых покрываются интервалами других конъюнкций, входящих в ДНФ.

Задача удаления или оставления конъюнкции может решаться прямым перебором по «точкам испытуемой конъюнкции» или с помощью критерия поглощения. Известно, что в общем случае проверка на то, равна ли функция тождественной единице, является сложной задачей. Однако при проверке поглощения мы рассматриваем относительно простой частный случай. При этом есть надежда, что иногда такую проверку можно осуществить достаточно быстро.

Одна из возможностей состоит в применении проверки ДНФ с уже удалёнными буквами испытуемой конъюнкции на тождественное равенство единице. Для этого можно применить метод Блейка построения сокращённой ДНФ, и если рассматриваемая функция равна единице, то и её сокращённая ДНФ тождественно равна единице, что покажет метод Блейка. Если в процессе применения метода Блейка получится любая отличная от единицы ДНФ, то построенная функция не равна единице, и, следовательно, испытуемая конъюнкция не поглощается совокупностью конъюнкций, входящих в окрестность первого порядка (или их частью).

В данной работе выделяются случаи, когда метод Блейка быстро приводит к ответу и, наоборот, когда применение этого метода связано с большими, невыполнимыми объёмами вычислений.

Предлагается синтез, обеспечивающий реальную применимость при решении прикладных задач. В работе последовательно конструируются и изучаются методы построения «относительно несложной» ДНФ, а затем решается задача, кратко сформулированная выше.

Построение дизъюнктивных нормальных форм

Пусть n — число переменных и булева функция $f(\tilde{x}^n)$ задана набором k своих нулей:

$$(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}), \quad i = \overline{1,\, k}.$$

Известно, что такая функция представима в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы следующим образом:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{i=1}^{k} (x_1^{\alpha_{i1}} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_{in}}).$$

Для того, чтобы преобразовать это выражение в дизъюнктивную нормальную форму, необходимо раскрыть скобки, используя закон дистрибутивности, и применить правила идемпотентности ($x \wedge x = x$) и поглощения ($K_1 \vee K_1 K_2 = K_1$). Нетрудно видеть, что число образованных слагаемых до поглощений составляет n^k. Оно быстро растёт с увеличением числа переменных, и даже при относительно малом числе нулей большое n может создать практически неразрешимую задачу.

Возникает вопрос о нахождении «непрямых» методов получения ДНФ функции, заданной набором своих нулей.

Глава 1. Обзор существующих подходов

Задача реализации булевых функций с небольшим числом нулей возникает во многих прикладных задачах и потому активно исследовалась. Коснёмся проведённых исследований в этом направлении.

§1.1 Построение ДНФ по формуле С. В. Яблонского

Рассматривается частный пример функции $f(\tilde{x}^n)$, которая обращается в ноль только на нулевом и единичном наборах: $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1) = 0$.

Соответствующая ей КНФ имеет вид

$$f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n).$$

После прямого раскрытия скобок образуется $n^2 - n$ конъюнкций (за исключением противоречивых конъюнкций вида $x_i \wedge \bar{x}_i,\ i = \overline{1,\, n}$), однако С. В. Яблонский заметил, что существует короткая форма:

$$f(\tilde{x}^n) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \ldots \vee x_n \bar{x}_1.$$

Длина этой ДНФ равна n.

§1.2 Метод Журавлёва – Когана

Опишем алгоритм, предложенный в работе Ю. И. Журавлёва и А. Ю. Когана [2].

Пусть задана матрица нулей функции f:

$$M_{k\times n} = \{\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})\}_{i=1}^{k}.$$

Будем считать, что

1. в матрице M отсутствуют нулевые и единичные столбцы (поскольку в результирующую ДНФ сопоставленные им переменные в соответствующих степенях войдут в качестве конъюнкции ранга 1);

2. в матрице M присутствует не более одного из двойственных столбцов (т.е. таких, один из которых является отрицанием второго). Этого можно добиться заменой переменных
$$x_i \to x_i^{\bar{\alpha}_{1i}},\ i = \overline{1,\, n},$$
при этом первая строка матрицы M окажется нулевой.

3. столбцы матрицы M упорядочены так, чтобы одинаковые столбцы образовывали последовательные блоки. Это может быть получено заменой
$$x_i \to x_{\pi(i)},\ i = \overline{1,\, n},$$
где π — перестановка на множестве из n элементов.

   Пусть было образовано m групп, в каждой по $n_i,\ i = \overline{1,\, m}$, столбцов.

Составим новую матрицу $M'_{k\times m}$, в которую столбцы из каждой группы входят ровно один раз, и пусть она является матрицей нулей некоторой функции $\varphi(\tilde{z}^m)$. Пусть $\mathcal{D}_\varphi$ — ДНФ функции φ в исходных переменных, что можно образовать с помощью замены

$$z_i \to x_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1},\ i = \overline{1,\, m}.$$

Тогда

$$\mathcal{D}_f = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \ldots \vee x_{n_1}\bar{x}_1 \vee x_{n_1+1}\bar{x}_{n_1+2} \vee x_{n_1+2}\bar{x}_{n_1+3} \vee \ldots \vee x_{n_2}\bar{x}_{n_1+1} \vee \ldots$$
$$\ldots \vee x_{n_{m-1}+1}\bar{x}_{n_{m-1}+2} \vee x_{n_{m-1}+2}\bar{x}_{n_{m-1}+3} \vee \ldots \vee x_n\bar{x}_{n_{m-1}+1} \vee \mathcal{D}_\varphi.$$

Её длина $L(\mathcal{D}_f) = L(\mathcal{D}_\varphi) + \sum\limits_{i=1}^{m} n_i[n_i > 1]$.

Определение. Булева функция g называется *приведённой*, если матрица M_g её нулевых точек состоит из различных столбцов, исключая нулевой и единичный, причём из каждых двух двойственных столбцов в M_g содержится ровно один.

Таким образом, выше описано построение приведённой функции φ, соответствующей исходной функции f.

Пример 1. Пусть задана матрица нулей функции $f(\tilde{x}^9)$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Описанными выше заменами переменных она приводится к виду

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \bar{x}_1 & x_2 & x_7 & \bar{x}_9 & \bar{x}_3 & \bar{x}_6 & x_4 & \bar{x}_8 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Матрица соответствующей приведённой функции $\varphi(\tilde{z}^4)$:

$$M' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Минимальная ДНФ функции φ:

$$\mathcal{D}_\varphi^z = \bar{z}_1 z_4 \vee \bar{z}_3 z_4 \vee z_1 z_2 z_3 \vee z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_4 \vee \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_3 \vee \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_3.$$

В исходных переменных x:

$$\mathcal{D}_\varphi^x = x_1 x_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

ДНФ функции f:

$$\mathcal{D}_f = (x_2\bar{x}_7 \vee x_7 x_9 \vee \bar{x}_9 \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_3 x_6 \vee \bar{x}_6 x_3) \vee (x_4 x_8 \vee \bar{x}_8 \bar{x}_4) \vee \bar{x}_5 \vee \mathcal{D}_\varphi^x =$$

$$= x_2\bar{x}_7 \vee x_7 x_9 \vee \bar{x}_9 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 x_6 \vee \bar{x}_6 x_3 \vee x_4 x_8 \vee \bar{x}_8 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 \vee x_1 x_4 \vee x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

§1.3 Метод Дьяконова

В статье [6] А. Г. Дьяконова описывается метод построения ДНФ булевой функции, заданной матрицей своих нулей, в которой существует единичная подматрица (с точностью до перестановки столбцов и инвертирования их значений).

Опишем полученные А. Г. Дьяконовым результаты построения ДНФ приведённой функции. Связь ДНФ исходной функции с ДНФ соответствующей ей приведённой подробно описана в предыдущем параграфе §1.2.

Напомним используемые в статье обозначения.

Задана приведённая функция $\varphi(\tilde{x}^n)$ и её матрица нулей $||\alpha_{ij}||_{k\times n}$.

Столбцу $(\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{kj})^{\mathrm{T}}$ соответствует переменная $x_{z(j)}$, $z(j)=\sum\limits_{i=1}^{k}2^{i-1}\alpha_{ij}$, переменной $x_t, t\in\{z(1),\ldots,z(n)\}$, — столбец $(\alpha_{1y(t)},\ldots,\alpha_{ky(t)})^{\mathrm{T}}$.

Множества индексов нулевых/ненулевых элементов столбцов:

$$Z(t)=\{j|\alpha_{jy(t)}=0\},\quad E(t)=\{j|\alpha_{jy(t)}=1\}.$$

Множество индексов переменных, соответствующие столбцы которых не входят в единичную подматрицу:

$$V=\{z(1),\ldots,z(n)\}\setminus\left\{2^i|i=\overline{0,\,k-1}\right\}.$$

Разбиение множества столбцов длины $(k-1)$

$$\Psi=\{\psi(t)=(\alpha_{1t},\ldots,\alpha_{(k-1)t})^{\mathrm{T}}|t\in V\}\subset E^{k-1}\setminus E_0^{k-1}\setminus E_1^{k-1}\setminus E_{k-1}^{k-1}$$

на непересекающиеся цепи:

$$V=\bigcup_{i=1}^{q}B^i,\quad B^i\cap B^j=\varnothing,\ i\neq j,\ i,j\in\{1,\ldots,q\},\quad B^i=\{b_1^i,\ldots,b_{\beta(i)}^i\},$$

при этом $(\psi(y(b_1^i)),\ldots,\psi(y(b_{\beta(i)}^i))$ — цепь в Ψ.

ДНФ приведённой функции:

$$\mathcal{D}^{\gamma}=\bigvee_{t\in V}\left(x_t\wedge\bigwedge_{i\in E(t)}\bar{x}_{2^{i-1}}\vee\bar{x}_t\wedge\bigwedge_{i\in Z(t)}\bar{x}_{2^{i-1}}\right)\vee\bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant k}x_{2^{i-1}}x_{2^{j-1}}.$$

Её длина $L(\mathcal{D}^{\gamma})=2n+\frac{1}{2}(k^2-5k)$.

$$\mathcal{D}^{\Gamma}=\bigvee_{i=1}^{q}\left(\bigvee_{j=1}^{\beta(i)-1}\bar{x}_{b_j^i}\bar{x}_{b_{j+1}^i-b_j^i}\bar{x}_{b_{j+1}^i}\vee x_{b_1^i}\wedge\bigwedge_{j\in E(b_1^i)}\bar{x}_{2^{j-1}}\vee\bar{x}_{b_{\beta(i)}^i}\wedge\bigwedge_{j\in Z(b_{\beta(i)}^i)}\bar{x}_{2^{j-1}}\right)\vee\bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant k}x_{2^{i-1}}x_{2^{j-1}}.$$

Её длина $L(\mathcal{D}^{\Gamma})=n+\frac{1}{2}(k^2-5k)+q$.

Обе ДНФ $\mathcal{D}^{\gamma}$ и $\mathcal{D}^{\Gamma}$ реализуют приведённую функцию φ и являются тупиковыми. $\mathcal{D}^{\gamma}$ является частным случаем $\mathcal{D}^{\Gamma}$, когда разбиение булева куба на цепи представляет собой набор цепей по одному элементу. Поэтому для $\mathcal{D}^{\gamma}$ формула выписывается явно, а для $\mathcal{D}^{\Gamma}$ необходимо произвести предварительное разбиение булева куба E^{k-1} на непересекающиеся цепи.

Глава 2. Метод разбиения на полосы

Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ задана своей матрицей нулей $M_{k\times n}$ и пусть требуется построить её ДНФ по возможности меньшей сложности. Предложим алгоритм, который заключается в построении КНФ этой функции, состоящей из скобок небольшой сложности, с последующим их раскрытием.

Выберем некоторый способ разбиения и поделим матрицу M на r полос.

Для каждой из подматриц $M_i,\ i=\overline{1,r}$, построим ДНФ $\mathcal{D}_i$, соответствующую функции с такой матрицей нулей.

Исходная функция f представима в виде

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{i=1}^{r} \mathcal{D}_i,$$

и её ДНФ $\mathcal{D}_f$ может быть получена раскрытием скобок в данном выражении и применением правила поглощения.

Видно, что чем меньше длина каждой ДНФ $\mathcal{D}_i$, тем меньше длина и искомой результирующей ДНФ $\mathcal{D}_f$.

Для определения $\mathcal{D}_i$ воспользуемся результатами А. Г. Дьяконова (см. §1.3) построения ДНФ булевых функций, матрица нулей которых содержит единичную подматрицу. По заданной матрице нулей M_i ДНФ $\mathcal{D}_i$ можно строить любым из описанных в §1.3 двух способов.

Этим направлением разбиения матрицы на полосы занимались и ранее, например, проведено исследование в дипломной работе Д. Ю. Морозовой (Москва, факультет ВМК, 2014).

§2.1 Способы разбиения строк матрицы нулей

Возможны различные подходы к выбору ширины полос, на которые разбивается матрица нулей M.

1°. Пусть фиксируется параметр p и исходная матрица нулей M делится на $r = \left[\frac{k}{p}\right]$ полос одинаковой ширины.

При $p = 1$ описанный выше алгоритм сведётся к построению ДНФ по каждому отдельному нулю функции f и записи совершенной конъюнктивной нормальной формы. При $p = k$ мы ничем не упростили задачу построения ДНФ функции с k нулями. Покажем, что выбором $1 \leqslant p \leqslant k$ можно добиться улучшения результата.

Исходя из того, что

- в каждой образованной M_i должна быть единичная подматрица,

- чем меньше различных столбцов в матрице M_i, тем меньше длина образуемой ДНФ,

предложим следующий жадный алгоритм.

Предполагая, что выбранный параметр p достаточно мал, мы можем позволить полный перебор C_k^p подножеств строк (например, при $p = 5$ и $k = 25$ необходимо рассмотреть $C_{25}^5 = 53130$ вариантов).

Для первой группы строк перебираются все подмножества по p из k строк исходной матрицы M и выбирается такое, в котором присутствует единичная подматрица и содержится как можно больше одинаковых столбцов. Для второй группы процедура повторяется выбором подножества по p из оставшихся $k - p$ строк и так далее.

Если в какой-то момент оказалось, что ни одно подмножество строк не образует единичную подматрицу, то параметр p уменьшается, т.е. последующие полосы будут иметь меньшую «ширину», и процесс для них повторяется. Заметим, что уменьшением p всегда можно добиться получения единичной матрицы в выбранной подматрице: для $p = 1$ это выполнено всегда.

Алгоритм 1: Разбиение матрицы нулей M

Вход: $M \in \{0,\, 1\}^{k \times n}$ — бинарная матрица

Параметры: p — число строк в образованных подматрицах

Выход: $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^r$ — разбиение матрицы M по строкам, где $r = \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$

$Inds := \{1, \ldots, k\}$ — множество ещё не использованных индексов строк матрицы M;

Для $i = \overline{1,\, r}$ **выполнять**

    Для каждого подмножества $subset$ по p индексов из $Inds$ **выполнять**

        Если в матрице, образованной выбранными строками $subset$, существует единичная подматрица и число различных столбцов меньше, чем в текущем выбранном наборе $subset_i$, **то**

            $subset_i := subset$;

    $M_i := M(subset_i)$;

    $Inds := Inds \backslash subset_i$;

Отсутствие единичной подматрицы размера $p \times p$ с точностью до перестановки столбцов и их инвертирования означает, что в хотя бы $n - p$ столбцах присутствует хотя бы 2 нуля и 2 единицы.

2°. Метод А. Г. Дьяконова строит ДНФ, длины которых показали себя достаточно близкими к оптимальным в ряде случаев. Если бы исходная матрица M содержала единичную подматрицу, то разбивать её и вовсе не потребовалось бы.

Будем искать наибольшее множество строк матрицы M, содержащее единичную подматрицу. После их удаления повторим процедуру для оставшихся строк и так далее.

Этот способ может оказаться более вычислительно затратным, чем предыдущий, поскольку размер p наибольшей единичной подматрицы заранее неизвестнен, и на первом шаге необходимо последовательно перебирать все возможные размеры от k до 1. При этом число перебираемых вариантов подмножеств строк, образующих подматрицы, равно $C_k^k + C_k^{k-1} + \ldots + C_k^p$.

Алгоритм 2: Разбиение матрицы нулей M

Вход: $M \in \{0, 1\}^{k\times n}$ — бинарная матрица

Выход: $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^r$ — разбиение матрицы M по строкам

$Inds := \{1, \ldots, k\}$ — множество ещё не использованных индексов строк матрицы M;

Для $p = k, \ldots, 1$ **выполнять**

    До тех пор, пока в M существует единичная подматрица размера $p \times p$, **выполнять**

        Для каждого подмножества $subset$ по p индексов из $Inds$ **выполнять**

            Если в матрице, образованной выбранными строками $subset$, существует единичная подматрица и число различных столбцов меньше, чем в текущем выбранном наборе $subset_i$, **то**

                $subset_i := subset$;

        $\mathcal{M} := \mathcal{M} \cup M(subset_i)$;

        $Inds := Inds \backslash subset_i$;

§2.2 Оценка длины ДНФ

Оценим число конъюнкций результирующей ДНФ $\mathcal{D}_f$.

Напомним, что в случае фиксированного параметра p ДНФ $\mathcal{D}_f$ получается перемножением $r = \left[\frac{k}{p}\right]$ скобок, каждая из которых представляет собой ДНФ $\mathcal{D}_i$, полученную по способу, описанному в §1.3.

$$L(\mathcal{D}_i) = 2m_i + \frac{1}{2}(p^2 - 5p) + L(\mathcal{D}'_i),$$

где $\mathcal{D}'_i$ соответствует переводу ДНФ приведённой функции к исходной, $L(\mathcal{D}'_i) \leqslant n$.

Тогда длина ДНФ $\mathcal{D}_f$ до применения поглощений после раскрытия скобок оценивается как

$$L(\mathcal{D}_f) = \prod_{i=1}^{r} \left(2m_i + \frac{1}{2}(p^2 - 5p) + L(D'_i)\right).$$

Как функция от параметра $p,\ 1 \leqslant p \leqslant k$, она выпукла:

$$L(p;n,k) = \left(\underline{Q}(n) + \frac{1}{2}(p^2 - 5p)\right)^{\frac{k}{p}}.$$

Пример 2. Рассмотрим пример построения ДНФ функции описанным выше методом.

Пусть задана матрица 15-ти нулей функции $f(\tilde{x}^{15})$:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Она была разбита на 3 полосы по 6, 5 и 4 нуля следующим образом:

$$M_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Матрицы соответствующих приведённых функций с выделенными единичными подматрицами:

$$M_1' = \left(\begin{array}{|cccc|c|c|ccc|c|cccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array} \right)_{6\times 14}$$

$$M_2' = \left(\begin{array}{|ccc|c|c|cc|c|cc} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array} \right)_{5\times 10}$$

$$M_3' = \left(\begin{array}{|ccc|c|c|c} 0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{array} \right)_{4\times 6}$$

Длины ДНФ приведённых функций, построенных по методу Дьяконова:

$$L(\mathcal{D}_1') = 2 \cdot 14 + \frac{1}{2}(6^2 - 5 \cdot 6) = 31$$

$$L(\mathcal{D}_2') = 2 \cdot 10 + \frac{1}{2}(5^2 - 5 \cdot 5) = 20$$

$$L(\mathcal{D}_3') = 2 \cdot 6 + \frac{1}{2}(4^2 - 5 \cdot 4) = 10$$

Длины ДНФ исходных функций, задаваемых матрицами нулей M_1, M_2, M_3, где добавляются конъюнкции, соответствующие константным столбцам и группам переменных с одинаковыми столбцами в матрице нулей:

$$L(\mathcal{D}_1) = 2 + L(\mathcal{D}_1') = 33$$

$$L(\mathcal{D}_2) = 3 + 2 + 2 + 2 + L(\mathcal{D}_2') = 29$$

$$L(\mathcal{D}_3) = 2 + 4 + 2 + 2 + 3 + L(\mathcal{D}_3') = 23$$

Длина ДНФ $\mathcal{D}$ после раскрытия скобок и применения правила поглощения:

$$L(\mathcal{D}) = 11647$$

Глава 3. Построение тупиковой ДНФ

Напомним, что тупиковой ДНФ функции f называется такая ДНФ её простых импликант, из которых нельзя выбросить ни одного импликанта, не изменив функции f.

Известно, что любая тупиковая ДНФ, в частности, минимальная, может быть получена из сокращённой путём удаления некоторых импликант. В общем случае поиск сводится к полному перебору всех возможных комбинаций. Существуют различные способы повышения эффективности алгоритма синтеза минимальных или достаточно простых ДНФ по сравнению с сокращённой нормальной формой.

Пусть дана сокращённая ДНФ $\mathcal{D}_f$ функции f:

$$\mathcal{D}_f = \bigvee_{i=1}^{n} K_i.$$

Распространена, по-видимому, правильная гипотеза о том, что построение минимальной ДНФ этой функции является NP-полной задачей, поэтому предложим вариант построения некоторой тупиковой ДНФ f, которая в некоторых случаях, вероятно, достаточно близка по сложности к минимальной.

§3.1 Проверка поглощения конъюнкции

Пусть для конъюнкции K требуется проверить, поглощается ли она остальными конъюнкциями ДНФ $\mathcal{D}$. Рассмотрим прямой алгоритм поточечной проверки интервала, соответствующего конъюнкции K.

Определим окрестность 1-го порядка $S_1(K)$ конъюнкции K. Будем по очереди перебирать конъюнкции $K' \in S_1(K)$ и пересекать соответствующий им интервал $N_{K'}$ с интервалом N_K. Если в результате все точки интервала N_K оказались покрытыми, то K поглощается конъюнкциями из своей окрестности 1-го порядка.

Пусть $K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$, $\mathrm{rg}K = k$, и $K' = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \dots x_{j_m}^{\sigma_{j_m}}$, $\mathrm{rg}K' = m$. Определим конъюнкцию, соответствующую пересечению интервалов N_K и $N_{K'}$. Она будет иметь вид $K'' = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \dots x_{i_k}^{\sigma_{i_k}} x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \dots x_{j_m}^{\sigma_{j_m}}$, при этом некоторые буквы, входящие в запись K и K', могут совпадать, т.е. $\max\{k,\, m\} \leqslant \mathrm{rg}K'' \leqslant k + m$. Тогда сложность построения интервала пересечения составляет $\underline{O}(k+m) = \underline{O}(n)$, где n — число переменных.

Пусть $|S_1(K)| = t$, тогда построение всех пересечений займёт $\underline{O}(tn)$ операций.

Упорядочим полученные конъюнкции-пересечения по убыванию их размерности, таким образом, при проверке покрытия точек конъюнкции K мы начнём с тех, которые накроют максимальное число точек. Поскольку ранги конъюнкций — целые числа, непревосходящие n, то для их упорядочения можно применить алгоритм сортировки подсчётом, временная сложность которого линейна $\underline{O}(t+n)$. При этом можно удалить повторы, которые в отсортированном списке конъюнкций будут идти подряд.

Для каждой из t конъюнкций K'' необходимо отметить покрываемые ею точки, число которых $2^{n-\mathrm{rg}K''}$.

Алгоритм 3: Проверка факта поглощения конъюнкции

Вход: K — испытуемая конъюнкция, $S_1(K)$ — её окрестность 1-го порядка

Выход: ответ, покрывается ли K её окрестностью 1-го порядка

$X := \varnothing$ — множество конъюнкций, соответствующих пересечениям;
Для каждой $K' \in S_1(K)$ **выполнять**
  $X := X \cup \{K \wedge K'\}$;
Сортировка X в соответствии с размерностями интервалов конъюнкций;
Интервал N_K конъюнкции K заполняется нулями;
$c := 0$ — обнуляется счётчик покрытых точек;
Для каждой $K'' \in X$ **выполнять**
  $c := c + 2^{n-\mathrm{rg}K''} - (\#$ число отмеченных единиц в $N_{K''})$;
  Подынтервал $N_{K''}$ интервала N_K заполняется единицами;
  Если $c = 2^{n-rgK}$, **то**
    Возвращается ответ, что конъюнкция K поглощается, и выход;
Возвращается ответ, что конъюнкция K не поглощается, и выход;

---

§3.2 Очередь проверки

При построении тупиковой ДНФ по данной сокращённой требуется вычеркнуть из неё некоторые конъюнкции так, чтобы оставшиеся интервалы образовывали неприводимое покрытие. Опишем метод, предложенный в нашей предыдущей курсовой работе, который показал для некоторых ДНФ неплохие результаты.

Итак, пусть $\mathcal{D}_f = \bigvee\limits_{i=1}^{r} K_i$ — сокращённая ДНФ функции f. Будем по очереди выбрасывать из $\mathcal{D}_f$ те конъюнкции, соответствующие интервалы которых покрываются минимальным числом других интервалов из своей окрестности 1-го порядка, пока не останется неприводимое покрытие.

Алгоритм 4: Построение тупиковой ДНФ

Вход: $\mathcal{D}_f$ — сокращённая ДНФ функции f

Выход: $\mathcal{D}'$ — тупиковая ДНФ, реализующая функцию f

$\mathcal{D}' := \mathcal{D}_f$ — искомая ДНФ;

Для каждой $K \in \mathcal{D}$ **выполнять**

  Определяем её окрестность 1-го порядка $S_1(K)$;

До тех пор, пока $\exists K^* \in \mathcal{D}'$, которая поглощается конъюнкциями из своей окрестности 1-го порядка, **выполнять**

  Для каждой такой K^* **выполнять**

    Вычисляем $\mathrm{mincover}(K^*)$ — минимальное число конъюнкций из $S_1(K^*)$, которыми поглощается K^*;

    Если $\mathrm{mincover}(K^*) < \mathrm{mincover}(K_{\min})$, **то**

      $K_{\min} := K^*$ — обновляется текущая лучшая найденная конъюнкция;

  Для каждой $K \in S_1(K_{\min})$ **выполнять**

    $S_1(K) := S_1(K) \backslash K_{\min}$;

  $\mathcal{D}' := \mathcal{D}' \backslash K_{\min}$;

Основная сложность заключается в определении mincover — минимального числа конъюнкций, которыми покрывается какая-то данная. Интервал испытуемой конъюнкции разбивается интервалами других конъюнкций на непересекающиеся множества. Каждое из множеств покрывается некоторым набором конъюнкций. Возникает задача определения минимального покрытия. Решение подробно описано в предыдущей курсовой работе.

Глава 4. Критерий поглощения и алгоритм Блейка

В ходе применения критерия поглощения возникает, вообще говоря, NP-полная задача определить, является ли полученная ДНФ $\mathcal{D} = \bigvee\limits_{i=1}^{r} K_i$ тождественной единицей. Тем не менее, в некоторых случаях проверка выполнимости может быть достаточно эффективно решена с помощью алгоритма Блейка.

Для выполнения этой проверки воспользуемся методом Блейка построения сокращённой ДНФ булевой функции, задаваемой $\mathcal{D}$.

Правило Блейка:

$$Ax \vee B\bar{x} = Ax \vee B\bar{x} \vee AB,$$

$$x \vee A\bar{x} = x \vee A.$$

Если обобщить правило Блейка на случай, когда и A, и B состоят из пустого множества букв, т.е. $A = B = 1$, то по этому правилу можно было бы получить конъюнкцию, соответствующую 1:

$$x \vee \bar{x} = 1\&x \vee 1\&\bar{x} = 1\&x \vee 1\&\bar{x} \vee 1\&1 = x \vee \bar{x} \vee 1 = 1.$$

Соответствующий этой единичной конъюнкции интервал будет максимальным. Т.к. по теореме результат работы метода Блейка — сокращённая ДНФ, то если изначальная $\mathcal{D} \equiv 1$, мы получим сокращённую ДНФ из одной конъюнкции: 1.

Однако если считать элементарную конъюнкцию из пустого множества букв недопустимой, то в результате такая конъюнкция образована не будет.

Пример 3.

$$\mathcal{D} = x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Применим правило Блейка и простое поглощение:

$$x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 =$$

$$= x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_3$$

Для каждой переменной x_i в сокращённую ДНФ вошло $x_i \vee \bar{x}_i$. Заметим, что и в этом случае можно получить конъюнкцию 1, воспользовавшись правилом $x \vee \bar{x} = 1$.

Пример 4.

$$\mathcal{D} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2$$

Применим правило Блейка и простое поглощение:

$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \vee x_2 =$$

$$= x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$$

Не для всех x_i в сокращённую ДНФ вошло выражение $x_i \vee \bar{x}_i$.

Если $\mathcal{D} \equiv 1$, то, вообще говоря, не для всех переменных x_i из её формулы в сокращённой ДНФ будет присутствовать $x_i \vee \bar{x}_i$, это зависит от формы записи исходной ДНФ $\mathcal{D}$.

Утверждение 1. *Пусть задана ДНФ $\mathcal{D}$ и в результате применения метода Блейка получена ДНФ $\mathcal{D}'$. $\mathcal{D} \equiv 1$ тогда и только тогда, когда $\exists i : x_i \vee \bar{x}_i$ входит в $\mathcal{D}'$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим функцию $f(\tilde{x}^{n+1}) = x_{n+1} \wedge \mathcal{D}$. Т.к. $\mathcal{D} \equiv 1$, то сокращённая ДНФ $\mathcal{D}_f^{\text{сокр}} = x_{n+1}$.

По теореме применение метода Блейка к ДНФ $\bigvee\limits_{i=1}^{r} x_{n+1} \wedge K_i$ функции f даст единственную конъюнкцию x_{n+1}, которая могла быть получена из преобразования

$$x_{n+1}x_i \vee x_{n+1}\bar{x}_i = x_{n+1}x_i \vee x_{n+1}\bar{x}_i \vee x_{n+1}.$$

(При этом правило $x_i \vee x_{n+1}\bar{x}_i = x_i \vee x_{n+1}$ не могло быть применено, т.к. все конъюнкции на любом этапе содержат x_{n+1}, а $\bar{x}_{n+1}$ нигде не встречается и образовано быть не может.)

Значит, данные x_i и $\bar{x}_i$ встретятся в $\mathcal{D}'$.

Достаточность. Т.к. $x_i \vee \bar{x}_i \equiv 1$, то $\mathcal{D}' \equiv 1$. ДНФ $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$ задают одну и ту же функцию, поэтому из того, что $\mathcal{D}' \equiv 1$, следует, что и $\mathcal{D} \equiv 1$. Утверждение доказано. □

Итак, пусть заданы n — число переменных, конъюнкция $K = x_1 \dots x_q$ ранга q (с помощью замены переменных всегда можно добиться представления в таком виде) и ДНФ $\bigvee\limits_{i} K_i'$.

В ходе применения критерия поглощения после удаления букв, входящих в конъюнкцию K, образована ДНФ $\mathcal{D} = \bigvee\limits_{i=1}^{r} K_i$, в которую входят $2n - q$ различных букв: $x_{q+1}, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$.

В ходе метода Блейка для ДНФ $\mathcal{D}$ правило Блейка может быть применено к парам конъюнкций, содержащим только переменные x_{q+1} и $\bar{x}_{q+1}$, …, x_n и $\bar{x}_n$, остальные же могут встречаться в $\mathcal{D}$ только в единственной степени. Т.е. не более $n - q$ переменных встречаются в $\mathcal{D}$ в обоих степенях.

Будем исследовать поведение метода Блейка, применённого к полученной ДНФ, в зависимости от числа различных переменных, входящих в её запись в обеих степенях.

§4.1 Тривиальный случай

Пусть все переменные, встречавшиеся в исходной ДНФ в обеих степенях, входят в испытуемую конъюнкцию K. Тогда после удаления букв ДНФ $\mathcal{D}$ содержит все переменные в одинаковых степенях.

Утверждение 2. *Пусть каждая из переменных x_i, $i = \overline{1, n}$, встречается в любой из конъюнкций ДНФ $\mathcal{D}$ только в степени $\sigma_i \in \{0, 1\}$. Тогда $\mathcal{D} \not\equiv 1$.*

Доказательство. Рассмотрим набор $(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$. Функция, задаваемая ДНФ $\mathcal{D}$, принимает на нём значение 0, т.к. $\bar{\sigma}^\sigma = 0$. Значит, существует точка, не покрываемая $\mathcal{D}$, и $\mathcal{D} \not\equiv 1$. □

§4.2 Случай одной переменной

Пусть после удаления букв осталась единственная переменная x, которая встречается в записи $\mathcal{D}$ в обеих степенях: x и $\bar{x}$.

Пусть x встречается в r_1 конъюнкциях, а $\bar{x}$ — в r_0. В записи одной и той же конъюнкции и x, и $\bar{x}$ встречаться не могут, поскольку иначе она была бы противоречивой.

Правило Блейка применимо $r_1 \times r_0$ раз, по числу различных пар конъюнкций вида $xA \vee \bar{x}B$. Образованные в ходе метода Блейка конъюнкции имеют вид AB и содержать ни одну из букв x и $\bar{x}$ не могут.

Таким образом будет образовано не более $r_1 \times r_0$ новых конъюнкций, и если длина исходной ДНФ равна r, то получаем оценку $\underline{O}(r^2)$.

§4.3 Случай двух переменных

Пусть после удаления букв существуют две переменные, не ограничивая общности, x_1 и x_2, которые встречаются в записи $\mathcal{D}$ в обеих степенях.

Рассмотрим общий вид ДНФ $\mathcal{D}$:

$$\bigvee_i x_1 A_i \vee \bigvee_i \bar{x}_1 B_i \vee \bigvee_i x_2 C_i \vee \bigvee_i \bar{x}_2 D_i \vee \bigvee_i x_1 x_2 E_i \vee \bigvee_i x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bigvee_i \bar{x}_1 x_2 G_i \vee \bigvee_i \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i \vee \bigvee_i I_i,$$

где $A_i, \ldots, I_i$ не содержат переменных x_1, x_2.

Назовём набор конъюнкций $\{K_1, \ldots, K_p\}$ *независимыми*, если при перемножении двух различных их подмножеств результирующие конъюнкции не совпадают.

В этом параграфе будет получена точная верхняя оценка на число новых образованных конъюнкций в ходе метода Блейка, применённого к ДНФ описанного выше вида, поэтому везде далее полагаем, что набор конъюнкций $\{A_i, \dots, H_i\}$ независим. В противном случае при образовании новых конъюнкций, полученных по различным цепочкам применения правила Блейка, некоторые из них могут совпасть, что только уменьшит число новых конъюнкций, которые могли бы быть получены.

Будем применять правило Блейка сначала ко всем парам конъюнкций вида $x_i^{\sigma_i} P \vee x_i^{1-\sigma_i} x_j^{\delta_j} Q$, $i, j \in \{1, 2\}$:

$$x_i^{\sigma_i} P \vee x_i^{1-\sigma_i} x_j^{\sigma_j} Q = x_i^{\sigma_i} P \vee x_i^{1-\sigma_i} x_j^{\sigma_j} Q \vee x_j^{\sigma_j} PQ, \qquad (1)$$

в результате чего образуются новые конъюнкции с участием переменной $x_j^{\sigma_j}$, которые впоследствии также могут участвовать в образовании новых конъюнкций.

После того как правило (1) больше неприменимо, выполним все возможные преобразования вида:

$$x_i P \vee \bar{x}_i Q = x_i P \vee \bar{x}_i Q \vee PQ, \qquad (2)$$

в результате которых образуются конъюнкции, в которые переменные x_1 и x_2 не входят.

Для начала опишем случай, когда в исходную ДНФ $\mathcal{D}$ входит одинаковое число s конъюнкций вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$ и по t конъюнкций вида $x_i^{\sigma_i}$. Если их встречалось разное число, то положим s или t равным максимальному из них и получим оценку сверху, поскольку чем больше изначально было конъюнкций, тем большее число раз применимо правило Блейка и, следовательно, в ходе метода будет образовано не меньше конъюнкций.

Назовём этапом метода Блейка применение правила (1) к образованным на предыдущем этапе конъюнкциям, содержащим $x_j^{\delta_j}$, в паре с $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$ из исходной ДНФ.

Этап	Вид образованных конъюнкций	Число различных конъюнкций
1	x_1CF $\bar{x}_1CH$ x_1DE $\bar{x}_1DG$ x_1EF $\bar{x}_1GH$ x_2AG $\bar{x}_2AH$ x_2BE $\bar{x}_2BF$ x_2EG $\bar{x}_2FH$	2×6
2	x_1AFG $\bar{x}_1AGH$ x_1AEH x_1BEF $\bar{x}_1BEH$ $\bar{x}_1BFG$ x_1EFG $\bar{x}_1EGH$ x_1EFH $\bar{x}_1FGH$ x_2CFG $\bar{x}_2CFH$ x_2CEH x_2DEG $\bar{x}_2DEH$ $\bar{x}_2DFG$ x_2EFG $\bar{x}_2EFH$ x_2EGH $\bar{x}_2FGH$	2×10
3	x_1CFG $\bar{x}_1CFGH$ x_1CEFH $\bar{x}_1CEH$ x_1DEFG $\bar{x}_1DEGH$ x_1DEH $\bar{x}_1DFG$ $\bar{x}_1EFGH$ x_1EFGH x_2AFG $\bar{x}_2AFGH$ x_2AEGH $\bar{x}_2AEH$ x_2BEFG $\bar{x}_2BEFH$ x_2BEH $\bar{x}_2BFG$ $\bar{x}_2EFGH$ x_2EFGH	2×10
4	$\bar{x}_1AFGH$ x_1AEFGH $\bar{x}_1AEGH$ x_1BEFG $\bar{x}_1BEFGH$ x_1BEFH $\bar{x}_2CFGH$ x_2CEFGH $\bar{x}_2CEFH$ x_2DEFG $\bar{x}_2DEFGH$ x_2DEGH	2×6
5	x_1CEFGH $\bar{x}_1CEFGH$ $\bar{x}_1DEFGH$ x_1DEFGH x_2AEFGH $\bar{x}_2AEFGH$ $\bar{x}_2BEFGH$ x_2BEFGH	2×4
6	$\bar{x}_1AEFGH$ x_1BEFGH $\bar{x}_2CEFGH$ x_2DEFGH	2×2

Таблица 1: $s = 1$

Формулы симметричны по переменным $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$.

Здесь $A, \ldots, H$ — реализация одного из вариантов $A_i, \ldots, H_i$ из исходной ДНФ.

Каждое из выражений A, B, C или D может входить в конъюнкцию с переменной $x_i^{\sigma_i}$ максимум один раз: применение правила Блейка с конъюнкциями вида x_1A, $\bar{x}_1B$, x_2C, $\bar{x}_2D$ осуществляется только 1-м этапе.

Число этапов: $4s + 2$.

Буква E, F, G или H, вошедшая в описание вида конъюнкции, может удвоиться только через шаг: повторное применение правило Блейка с той же конъюнкцией невозможно.

Таким образом, впервые в описание конъюнкции k одинаковых букв входят на $(1 + 2(k-1))$-м этапе.

До шага $2s$ любое применение правила (1) давало увеличение числа букв, однако когда все варианты задействованы, добавлять больше нечего.

Число видов конъюнкций на этапе n:

$$\begin{cases} (1+2n)\times 4, \text{если } n \leqslant 2s, \\ (1+2(4s+1-n))\times 4 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Число видов конъюнкций на этапе n, в которые входит выражение A, B, C или D: $(n+1)\times 4$.

Число видов конъюнкций на этапе n, в которые не входит выражение A, B, C или D: $n \times 4$.

Максимальная длина конъюнкции на n-м этапе: $\min(n+1, 1+4s)$.

Максимальное число различных видов конъюнкций образуется на этапах $n = 2s$ и $n = 2s+1$.

Оценим сверху число конъюнкций, образованных на этапе $n \leqslant 2s$: $4(1+2n)\times s^{n+1}$, где s^{n+1} — верхняя оценка на число различных вариантов реализаций конъюнкции определённого вида.

При $n > 2s$ число симметрично убывает.

Покажем, что возможно образование любой конъюнкции вида:

$$x_i^{\sigma_i} \underbrace{E_1 \dots E_{k_E}}_{1 \leqslant k_E \leqslant k} \underbrace{F_1 \dots F_{k_F}}_{1 \leqslant k_F \leqslant k} \underbrace{G_1 \dots G_{k_G}}_{1 \leqslant k_G \leqslant k} \underbrace{H_1 \dots H_{k_H}}_{1 \leqslant k_H \leqslant k}.$$

На первом этапе была образована конъюнкция $x_1 E_1 F_1$.

1. $x_1 E_1 F_1 \vee \bar{x}_1 x_2 G_1 = x_1 E_1 F_1 \vee \bar{x}_1 x_2 G_1 \vee x_2 E_1 F_1 G_1$
2. $x_2 E_1 F_1 G_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_1 = x_2 E_1 F_1 G_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_1 \vee \bar{x}_1 E_1 F_1 G_1 H_1$
3. $\bar{x}_1 E_1 F_1 G_1 H_1 \vee x_1 x_2 E_2 = \bar{x}_1 E_1 F_1 G_1 H_1 \vee x_1 x_2 E_2 \vee x_2 E_1 E_2 F_1 G_1 H_1$
4. $x_2 E_1 E_2 F_1 G_1 H_1 \vee x_1 \bar{x}_2 F_2 = x_2 E_1 E_2 F_1 G_1 H_1 \vee x_1 \bar{x}_2 F_2 \vee x_1 E_1 E_2 F_1 F_2 G_1 H_1$

и т.д. необходимое число раз.

Аналогичным образом могут быть получены конъюнкции, в которые входит одно из выражений A, B, C или D.

При добавлении случая, когда какие-либо из k_E, k_F, k_G, k_H равны 0, такая запись охватывает все возможные реализации на всех этапах. Оценим число этих реализаций: $4 \times (4t+1) \times 2^s 2^s 2^s 2^s = \underline{O}(t 2^{4s})$.

После преобразований вида (2) получим следующую оценку на общее число образованных конъюнкций: $4 \times (4t+1) 2^{4s} + 2 \times t(t + 2^{4s}) + 2 \times 2^{4s} = \underline{O}(t^2 + t 2^{4s}) = \underline{O}(r 2^r)$, считая, что длина исходной ДНФ r и $t = \underline{O}(r)$ и $s = \underline{O}(r)$.

Исходя из вида оценки, можно сделать вывод о том, что наибольшее число конъюнкций при фиксированной длине $r = 4t + 4s + q$ исходной ДНФ образуется при $t = 0$ и $s = \frac{r}{4}$, а минимальное в нетривиальном случае при $s = 1$ и $t = \frac{r}{4} - 1$.

Таким образом показано, что наличие даже 2-х букв с отрицаниями делает метод Блейка весьма трудоёмким.

Перейдём к рассмотрению случая образования наибольшего числа новых конъюнкций.

Оценка числа образованных конъюнкций в ходе метода Блейка для ДНФ специального вида

Пусть в ходе критерия поглощения получена ДНФ

$$\mathcal{D} = \bigvee_{i=1}^{s_1} x_1 x_2 E_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_2} x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_3} \bar{x}_1 x_2 G_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_4} \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i \vee \bigvee_{i} I_i,$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4s.$$

Здесь каждая из конъюнкций E_i, F_i, G_i, H_i содержит хотя бы одну уникальную переменную.

Например,

$$\mathcal{D} = \bigvee_{i=1}^{s_1} x_1 x_2 x_{i+2} \vee \bigvee_{i=1}^{s_2} x_1 \bar{x}_2 x_{i+s_1+2} \vee \bigvee_{i=1}^{s_3} \bar{x}_1 x_2 x_{i+s_1+s_2+2} \vee \bigvee_{i=1}^{s_4} \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_{i+s_1+s_2+s_3+2},$$

где переменные $x_i, i = \overline{3,\ 4s+2}$, встречаются только в одной степени. Её длина $L(\mathcal{D}) = 4s$.

Покажем, что максимальное число новых конъюнкций в ходе метода Блейка, применённого к ДНФ $\mathcal{D}$, образуется в случае $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s$.

1°. Пусть хотя бы одно из s_1, s_2, s_3 или s_4 равно 0.

1.1°. Пусть ровно один параметр равен нулю, для определённости, $s_1 = 0$, т.е. в $\mathcal{D}$ нет конъюнкций вида $x_1 x_2 E$, и

$$\mathcal{D} = \bigvee_{i} x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bigvee_{i} \bar{x}_1 \bar{x}_2 G_i \vee \bigvee_{i} \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i,$$

где $F_i \in \{x_{s_1+3}, \ldots, x_{s_1+s_2+2}\}, G_i \in \{x_{s_1+s_2+3}, \ldots, x_{s_1+s_2+s_3+2}\}, H_i \in \{x_{s_1+s_2+s_3+3}, \ldots, x_{4s+2}\}$.

Правило Блейка, применённое к исходным конъюнкциям, порождает следующие:

а) $x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i = x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i \vee \bar{x}_2 F_i H_i$

б) $\bar{x}_1 x_2 G_i \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i = \bar{x}_1 x_2 G_i \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i \vee \bar{x}_1 G_i H_i$

Возможные варианты правила Блейка, применённого к ним в паре с конъюнкциями из исходной ДНФ $\mathcal{D}$:

а) $\bar{x}_1 G_i H_i \vee x_1 \bar{x}_2 F_i = \bar{x}_1 G_i H_i \vee x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bar{x}_2 F_i G_i H_i$

б) $\bar{x}_2 F_i H_i \vee \bar{x}_1 x_2 G_i = \bar{x}_2 F_i H_i \vee \bar{x}_1 x_2 G_i \vee \bar{x}_1 G_i G_i H_i$

Образованные конъюнкции содержат переменные x_1 и x_2 только в отрицательной степени, и, следовательно, не могут больше образовывать новые конъюнкции в паре с конъюнкциями вида $\bar{x}_1 \bar{x}_2 D_i$. Более того, конъюнкций без переменных x_1 и x_2 быть образовано не может: для этого понадобились бы конъюнкции вида $x_1 P$ и $x_2 Q$.

Все возможные новые конъюнкции:

$$\bar{x}_1 GH \quad \bar{x}_1 \underbrace{F_1 \dots F_{s_F}}_{1 \leqslant s_F \leqslant s_2} \underbrace{G_1 \dots G_{s_G}}_{1 \leqslant s_G \leqslant s_3} H$$

$$\bar{x}_2 FH \quad \bar{x}_2 \underbrace{F_1 \dots F_{s_F}}_{1 \leqslant s_F \leqslant s_2} \underbrace{G_1 \dots G_{s_G}}_{1 \leqslant s_G \leqslant s_3} H$$

Подсчитаем их число: $\underbrace{s_3 s_4 + (2^{s_2} - 1)(2^{s_3} - 1)s_4}_{\bar{x}_1} + \underbrace{s_2 s_4 + (2^{s_2} - 1)(2^{s_3} - 1)s_4}_{\bar{x}_2} = \underline{O}(s2^{2s})$, что уступает оценке из пункта 2°.

1.2°. Пусть два параметра равны нулю.

Если оставшиеся конъюнкции имеют вид $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$ и $x_1^{1-\sigma_1} x_2^{1-\sigma_2}$, то новых конъюнкций образовано не будет.

В противном случае, если только одна из переменных x_1 или x_2 встречается в обоих степенях, то число новых конъюнкций равно $s_i s_j$, где i и j — индексы оставшихся групп.

1.3°. Если какие-либо три параметра $s_i, i \in \{1, 4\}$, равны нулю, то, очевидно, новых конъюнкций образовано не будет.

2°. Пусть $s_1, s_2, s_3, s_4 > 0$, и

$$\mathcal{D} = \bigvee_i x_1 x_2 E_i \vee \bigvee_i x_1 \bar{x}_2 F_i \vee \bigvee_i \bar{x}_1 \bar{x}_2 G_i \vee \bigvee_i \bar{x}_1 \bar{x}_2 H_i,$$

где $E_i \in \{x_3, \dots, x_{s_1+2}\}, F_i \in \{x_{s_1+3}, \dots, x_{s_1+s_2+2}\}, G_i \in \{x_{s_1+s_2+3}, \dots, x_{s_1+s_2+s_3+2}\}$, $H_i \in \{x_{s_1+s_2+s_3+3}, \dots, x_{4s+2}\}$.

Поскольку ранее было доказано, что образуются все конъюнкции вида

$$(1) \qquad x_i^\sigma \underbrace{E_1 \dots E_{s_E}}_{1 \leqslant s_E \leqslant s_1} \underbrace{F_1 \dots F_{s_F}}_{1 \leqslant s_F \leqslant s_2} \underbrace{G_1 \dots G_{s_G}}_{1 \leqslant s_G \leqslant s_3} \underbrace{H_1 \dots H_{s_H}}_{1 \leqslant s_H \leqslant s_4}, i \in \{1, 2\}, \sigma \in \{0, 1\},$$

исследуем те, в которые не входят все 4 буквы E, F, G, H, т.е. в цепочке из применений правила Блейка участвуют конъюнкции не из всех четырёх групп.

Этап	Вид образованных конъюнкций
1	$x_1EF\ \bar{x}_1GH\ x_2EG\ \bar{x}_2FH$
2	$x_1EFG\ x_1EFH\ \bar{x}_1EGH\ \bar{x}_1FGH$ $x_2EFG\ x_2EGH\ \bar{x}_2EFH\ \bar{x}_2FGH$
3	$x_1EFFG\ x_1EEFH\ \bar{x}_1EGHH\ \bar{x}_1FGGH$ $x_2EFGG\ x_2EEGH\ \bar{x}_2EFHH\ \bar{x}_2FFGH$
4	$x_1EFFGG\ x_1EEFHH\ \bar{x}_1EEGHH\ \bar{x}_1FFGGH$ $x_2EFFGG\ x_2EEGHH\ \bar{x}_2EEFHH\ \bar{x}_2FFGGH$
и т.д.	

Таблица 2: Вид конъюнкций, в которые не входят переменные из всех 4-х групп одновременно

Таким образом, новые конъюнкции, в которые входят переменные x_1, x_2, имеют вид:

$$
\begin{array}{ccc}
x_1EF & x_1E\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} & x_1\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}F\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \\
\bar{x}_1GH & \bar{x}_1\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}G\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} & \bar{x}_1\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}H \\
x_2EG & x_2E\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} & x_2\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}G\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \\
\bar{x}_2FH & \bar{x}_2\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}F\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} & \bar{x}_2\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}H
\end{array}
$$

и (1): $$x_i^\sigma\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}, i\in\{1,2\}, \sigma\in\{0,1\}.$$

Заметим, что для любой пары конъюнкций вида $x_i^\sigma P\vee x_i^{1-\sigma}Q, i\in\{1,2\}, \sigma\in\{0,1\}$, где P и Q не содержат букв $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$, конъюнкция PQ содержит буквы из всех четырёх групп переменных. В силу реализации всех конъюнкций (1) могут образоваться любые конъюнкции вида $\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$ и только они, поэтому можно точно подсчитать их число: $(2^{s_1}-1)\times(2^{s_2}-1)\times(2^{s_3}-1)\times(2^{s_4}-1)$.

Подсчитаем общее число новых образованных конъюнкций:

$$
\underbrace{s_1s_2+s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)}_{x_1}+\underbrace{s_3s_4+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4}_{\bar{x}_1}+
$$
$$
+\underbrace{s_1s_3+s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)}_{x_2}+\underbrace{s_2s_4+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4}_{\bar{x}_2}+
$$
$$
+\underbrace{4\times(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)}_{(1)}+\underbrace{(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)}_{\text{без } x_1, x_2}
$$

Максимизируя приведённое выражение при условии $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4s$, получим, что наибольшее значение достигается при симметричном варианте $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s$.

s	n	Число новых конъюнкций
1	6	17
2	10	565
3	14	13217

Примеры для $s = 1, 2, 3$

Обозначим

$$f(\overline{s}) = s_1s_2+s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+s_3s_4+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4+$$

$$+s_1s_3+s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+s_2s_4+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4+$$

$$+5(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1).$$

f — гладкая функция.

Поставим задачу локальной оптимизации:

$$\begin{cases} f(\overline{s}) \to \max \\ s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4s \end{cases} \qquad (2)$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\overline{s};\lambda) = f(\overline{s}) - \lambda(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - 4s).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_1} = s_2 + s_3 + 2(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1) + \\ \qquad + \ln(2)2^{s_1}(2^{s_4}-1)(2(s_2+s_3) + 5(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_4} = 0 \text{ (имеют аналогичный вид)} \\ s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4s \end{cases} \qquad (3)$$

Если положить

$$\begin{cases} s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s \\ \lambda = 2s + 2(2^s-1)^2 + \ln(2)2^s(2^s-1)(4s + 5(2^s-1)^2) \end{cases},$$

то это решение удовлетворяет системе (3): все уравнения вида $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i}, i = \overline{1,4}$, при равенстве s совпадают и дают выражение для λ. Значит, представленные $(\overline{s}, \lambda)$ — седловая точка функции Лагранжа и, соответственно, $\overline{s}$ — решение (2).

$$f(s,s,s,s) = 4s^2 + 8s(2^s-1)^2 + 5(2^s-1)^4$$

Перейдём к рассмотрению более общего случая $\mathcal{D}$:

$$\bigvee_{i=1}^{t_1} x_1A_i \vee \bigvee_{i=1}^{t_2} \bar{x}_1B_i \vee \bigvee_{i=1}^{t_3} x_2C_i \vee \bigvee_{i=1}^{t_4} \bar{x}_2D_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_1} x_1x_2E_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_2} x_1\bar{x}_2F_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_3} \bar{x}_1x_2G_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_4} \bar{x}_1\bar{x}_2H_i \vee \bigvee_{i} I_i.$$

Будем исследовать число новых конъюнкций, которые не исследованы в предыдущем случае, т.е. таких, в которые входят переменные из первых четырёх групп.

Поскольку ранее было доказано, что образуются все конъюнкции вида

$$x_i^\sigma P \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}, i\in\{1,2\}, \sigma\in\{0,1\}, P\in\{A,B,C,D\},$$

исследуем те, в которые не входят все 4 буквы E, F, G, H.

Можно выписать вид таких конъюнкций:

$$A\begin{cases} x_2AG \quad \bar{x}_2AH \quad \bar{x}_1AGH \\ \begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} A \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} \quad \begin{matrix}x_1\\\bar{x}_2\end{matrix} A \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \\ \begin{matrix}\bar{x}_1\\x_2\end{matrix} A \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1} G \underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \quad \begin{matrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{matrix} A \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} H \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x_2BE \quad \bar{x}_2BF \quad x_1BEF \\ \begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} BE \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} \quad \begin{matrix}x_1\\\bar{x}_2\end{matrix} B \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1} F \underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \\ \begin{matrix}\bar{x}_1\\x_2\end{matrix} B \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \quad \begin{matrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{matrix} B \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x_1CF \quad \bar{x}_1CH \quad \bar{x}_2CFH \\ \begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} C \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} \quad \begin{matrix}x_1\\\bar{x}_2\end{matrix} C \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1} F \underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \\ \begin{matrix}\bar{x}_1\\x_2\end{matrix} C \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \quad \begin{matrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{matrix} C \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} H \end{cases}$$

$$D\begin{cases} x_1DE \quad \bar{x}_1DG \quad x_2DEG \\ \begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix} DE \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} \quad \begin{matrix}x_1\\\bar{x}_2\end{matrix} D \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \\ \begin{matrix}\bar{x}_1\\x_2\end{matrix} D \underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1} G \underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4} \quad \begin{matrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\end{matrix} D \underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3} \end{cases}$$

Подсчитаем число новых конъюнкций вместе с теми, которые содержат только E,F,G,H, с участием переменных x_1,x_2:

$$f(\bar t,\overline s)=t_1\big(s_3+s_4+s_3s_4+2((2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)(2^{s_4}-1)+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4)+$$

$$+4(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)\big)+$$

$$+t_2\big(s_1+s_2+s_1s_2+2(s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+(2^{s_1}-1)(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1))+$$

$$+4(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)\big)+$$

$$+t_3\big(s_2+s_4+s_2s_4+2((2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+(2^{s_1}-1)(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4)+$$

$$+4(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)\big)+$$

$$+t_4\big(s_1+s_3+s_1s_3+2(s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)(2^{s_4}-1)+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1))+$$

$$+4(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)\big)+$$

$$+\big(s_1s_2+s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+s_3s_4+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4+$$

$$+s_1s_3+s_1(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)+(2^{s_1}-1)s_3(2^{s_4}-1)+s_2s_4+(2^{s_1}-1)s_2(2^{s_4}-1)+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)s_4+$$

$$+4(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)\big)$$

Выпишем вид новых образованных конъюнкций с участием A,B,C,D, в которые не входят переменные x_1,x_2 :

$$PQ\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4},\ \ P,Q\in\{A,B,C,D\}$$

$$AB\quad CD$$

$$ACH\quad ADG\quad BCF\quad BDE$$

$$AAGH\quad BBEF\quad CCFH\quad DDEG$$

$$AA\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}H\qquad AA\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}G\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$AB\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\qquad AB\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$AC\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}H\qquad AC\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$AD\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\qquad AD\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}G\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$BBE\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\qquad BB\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}F\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$BC\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\qquad BC\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}F\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$BDE\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\quad BD\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$CC\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}H\quad CC\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}F\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$CD\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\quad CD\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

$$DDE\underbrace{F_1\dots F_{s_F}}_{1\leqslant s_F\leqslant s_2}\underbrace{G_1\dots G_{s_G}}_{1\leqslant s_G\leqslant s_3}\quad DD\underbrace{E_1\dots E_{s_E}}_{1\leqslant s_E\leqslant s_1}G\underbrace{H_1\dots H_{s_H}}_{1\leqslant s_H\leqslant s_4}$$

Подсчитаем их число вместе с теми, которые содержат только E, F, G, H:

$$\left(\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)(t_1+t_2+t_3+t_4+1)+1\right)(2^{s_1}-1)(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)(2^{s_4}-1)+t_1t_2+t_3t_4+$$

$$+t_1t_3s_4+t_2t_4s_3+t_2t_3s_2+t_2t_4s_1+\frac{1}{2}t_1(t_1+1)s_3s_4+\frac{1}{2}t_2(t_2+1)s_1s_2+\frac{1}{2}t_3(t_3+1)s_2s_4+\frac{1}{2}t_4(t_4+1)s_1s_3+$$

$$+(2^{s_2}-1)(2^{s_3}-1)\left(\frac{1}{2}t_1(t_1+1)s_4+t_1t_2+t_1t_3s_4+t_1t_4+\frac{1}{2}t_2(t_2+1)s_1+\right.$$

$$\left.+t_2t_3+t_2t_4s_1+\frac{1}{2}t_3(t_3+1)s_4+t_3t_4+\frac{1}{2}t_4(t_4+1)s_1\right)+$$

$$+(2^{s_1}-1)(2^{s_4}-1)\left(\frac{1}{2}t_1(t_1+1)s_3+t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4s_3+\frac{1}{2}t_2(t_2+1)s_2+\right.$$

$$\left.+t_2t_3s_2+t_2t_4+\frac{1}{2}t_3(t_3+1)s_2+t_3t_4+\frac{1}{2}t_4(t_4+1)s_3\right)$$

Условия на образование единичной конъюнкции

В случае двух переменных в ходе метода Блейка для ДНФ $\mathcal{D}$ правило Блейка может быть применено к парам конъюнкций $x_1A\vee\bar{x}_1B$ и $x_2A\vee\bar{x}_2B$. Выпишем некоторые достаточные условия образования пары конъюнкций $x_1\vee\bar{x}_1$.

Напомним общий вид $\mathcal{D}$:

$$\bigvee_{i=1}^{t_1}x_1A_i\vee\bigvee_{i=1}^{t_2}\bar{x}_1B_i\vee\bigvee_{i=1}^{t_3}x_2C_i\vee\bigvee_{i=1}^{t_4}\bar{x}_2D_i\vee\bigvee_{i=1}^{s_1}x_1x_2E_i\vee\bigvee_{i=1}^{s_2}x_1\bar{x}_2F_i\vee\bigvee_{i=1}^{s_3}\bar{x}_1x_2G_i\vee\bigvee_{i=1}^{s_4}\bar{x}_1\bar{x}_2H_i\vee\bigvee_{i}I_i.$$

Условия для образования конъюнкции x_1:

1. $\exists A_i=1$
2. $\exists C_i=1$ и $\exists F_i=1$
3. $\exists D_i=1$ и $\exists E_i=1$
4. $\exists E_i=1$ и $\exists F_i=1$

Аналогично для $\bar{x}_1$:

1. $\exists B_i=1$
2. $\exists C_i=1$ и $\exists H_i=1$
3. $\exists D_i=1$ и $\exists G_i=1$
4. $\exists G_i=1$ и $\exists H_i=1$

Остальные условия (т.е. случай образования x_1 или $\bar{x}_1$ после цепочки из 2-х применений правила Блейка) избыточны, т.к. включают в себя хотя бы одно из перечисленных выше.

Таким образом достаточно провести только первые 2 этапа метода Блейка, чтобы понять, будет ли образована единичная конъюнкция.

§4.4 Поглощение в методе Блейка

После того как правило Блейка больше неприменимо, в методе Блейка необходимо выполнить все поглощения ($K_1 \vee K_1K_2 = K_1$).

Для рассмотренных выше видах ДНФ с двумя переменными в различных степенях проверим, какие из конъюнкций точно будут поглощены.

1°. Рассмотрим ДНФ, общий вид которой выглядит следующим образом:

$$\mathcal{D} = \bigvee_{i=1}^{s_1} x_1x_2E_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_2} x_1\bar{x}_2F_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_3} \bar{x}_1x_2G_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_4} \bar{x}_1\bar{x}_2H_i \vee \bigvee_{i} I_i.$$

То, как выглядят полученные применением правила Блейка конъюнкции, подробно описано выше (см. стр. 23). Среди них конъюнкциями

$$x_1EF \quad \bar{x}_1GH \quad x_2EG \quad \bar{x}_2FH \quad EFGH$$

поглотятся все остальные новые образованные конъюнкции, поскольку буквы в их записи будут являться подмножествами букв конъюнкций большего ранга. Сами они ничем другим поглотиться не могут.

Исходя из этого, нетрудно подсчитать число новообразованных конъюнкций, которые не будут поглощены в ходе метода Блейка:

$$f_{new}(\bar{s}) = s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_4 + s_3s_4 + s_1s_2s_3s_4.$$

В случае равенства $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s$ достигается максимальное значение $f_{new}(s, s, s, s) = 4s^2 + s^4$.

s	n	Число новых конъюнкций
1	6	5
2	10	32
3	14	117

Примеры для $s = 1, 2, 3$

2°. Более общий случай:

$$\bigvee_{i=1}^{t_1} x_1A_i \vee \bigvee_{i=1}^{t_2} \bar{x}_1B_i \vee \bigvee_{i=1}^{t_3} x_2C_i \vee \bigvee_{i=1}^{t_4} \bar{x}_2D_i \bigvee_{i=1}^{s_1} x_1x_2E_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_2} x_1\bar{x}_2F_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_3} \bar{x}_1x_2G_i \vee \bigvee_{i=1}^{s_4} \bar{x}_1\bar{x}_2H_i \vee \bigvee_{i} I_i.$$

Описание новых образованных конъюнкций см. на стр. 25-27.

Здесь все остальные образованные конъюнкции поглотят конъюнкции вида

$$x_1EF \quad \bar{x}_1GH \quad x_2EG \quad \bar{x}_2FH$$

$$x_1CF \quad x_1DE \quad \bar{x}_1CH \quad \bar{x}_1DG$$

$$x_2AG \quad x_2BE \quad \bar{x}_2AH \quad \bar{x}_2BF$$

$$EFGH \quad AB \quad CD$$

$$ACH \quad ADG \quad BCF \quad BDE$$

$$AGH \quad BEF \quad CFH \quad DEG$$

Подсчитаем их число:

$$f_{new}(\bar{t}, \bar{s}) = s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_4 + s_3s_4 + s_1s_2s_3s_4+$$

$$+t_1(s_3 + s_4 + s_3s_4) + t_2(s_1 + s_2 + s_1s_2) + t_3(s_2 + s_4 + s_2s_4) + t_4(s_1 + s_3 + s_1s_3)+$$

$$+t_1t_2 + t_3t_4 + t_1t_3s_4 + t_1t_4s_3 + t_2t_3s_2 + t_2t_4s_1.$$

При этом максимум достигается в случае $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0, s_1 = s_2 = s_3 = s_4$, что соответствует описанному выше случаю 1°.

Глава 5. Сравнение методов поточечного покрытия и критерия поглощения

Пусть необходимо проверить, поглощается ли конъюнкция K ДНФ $\mathcal{D} = \bigvee\limits_{i=1}^{r} K_i$.

Пусть n — число переменных, q — ранг конъюнкции K.

Шаг 1. Определим окрестность 1-го порядка конъюнкции K: $S_1(K, \mathcal{D}) = \{K_i\}$.

Для выполнения этой проверки достаточно $\underline{O}(rn)$ операций.

Пусть $|S_1(K, \mathcal{D})| = m$.

Шаг 2. Определим, образуют ли полученные K_i покрытие K. Возможны 2 способа:

1. Для каждой конъюнкции K_i отмечаем покрываемые ею точки интервала, соответствующего K. Если все точки этого интервала оказались покрыты, то конъюнкция K поглощается, иначе удалить её нельзя.

   Сложность этой операции не больше $\underline{O}(rn2^{n-q})$.

2. Применяем критерий поглощения и с помощью метода Блейка проверяем, верно ли, что $\bigvee\limits_{i=1}^{m} K'_i \equiv 1$. Если да, то, согласно критерию поглощения, конъюнкция K покрывается $\mathcal{D}$, иначе нет.

Из сказанного выше видно, что применение метода Блейка оказывается эффективным в небольшом ряде случаев, но в некоторых ситуациях он оптимален.

Пример 5 (Метод Блейка оптимален)**.**

Пусть заданы $n = 15$, $K = x_3\bar{x}_4$ и

$$\mathcal{D} = x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bigvee_{i=5}^{10} \bar{x}_1x_i \vee \bigvee_{i=11}^{15} \bar{x}_2x_i.$$

В ходе критерия поглощения получаем ДНФ

$$\mathcal{D}' = x_1 \vee x_2 \vee \bigvee_{i=5}^{10} \bar{x}_1x_i \vee \bigvee_{i=11}^{15} \bar{x}_2x_i.$$

В ней в обеих степенях встречаются только переменные x_1 и x_2, а в ходе применения правила Блейка образуется 11 новых конъюнкций:

$$\mathcal{D}'' = x_1 \vee x_2 \vee \bigvee_{i=5}^{10} \bar{x}_1x_i \vee \bigvee_{i=11}^{15} \bar{x}_2x_i \vee \bigvee_{i=5}^{15} x_i.$$

При поточечном покрытии было бы необходимо перебрать $2 \times 2^{13} + 11 \times 2^{12}$ точек, что на порядок превосходит число операций предыдущего метода.

Пример 6 (Прямое покрытие оптимально).

Пусть $n = 6$, $K = x_3\bar{x}_4$ и

$$\mathcal{D} = \bigvee_{i=3}^{6} x_1x_2x_i \vee \bigvee_{i=3}^{6} x_1\bar{x}_2x_i \vee \bigvee_{i=3}^{6} \bar{x}_1x_2x_i \vee \bigvee_{i=4}^{6} \bar{x}_1\bar{x}_2x_i.$$

В ходе критерия поглощения получаем ДНФ

$$\mathcal{D}' = x_1x_2x \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bigvee_{i=4}^{6}(x_1x_2x_i \vee x_1\bar{x}_2x_i \vee \bar{x}_1x_2x_i \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_i).$$

В ходе применения метода Блейка к $\mathcal{D}'$ образуется не менее $(2^3 - 1)^4$ новых конъюнкций.

При поточечном покрытии было бы необходимо перебрать $12 \times 2 + 3 \times 2^2$ точек, что значительно меньше.

Глава 6. Поиск нуля функции

При проверке поглощения конъюнкции с помощью критерия поглощения возникает задача установить, равна ли ДНФ, полученная после удаления букв испытуемой конъюнкции, тождественной единице. Если удаётся найти хотя бы один ноль соответствующей этой ДНФ функции, то это означает, что функция тождественной единицей не является. Таким образом проверка выполнена, и рассматриваемая конъюнкция не поглощается своей окрестностью 1-го порядка.

Задача точного установления наличия нуля булевой функции является сложной, но в некоторых случаях такое обнаружение может быть сделано достаточно «быстро». Предложим несколько способов перебора точек функции, которые в некоторых случаях решают эту задачу.

Пусть заданы n — число переменных, конъюнкция $K = x_1 \dots x_q$ ранга q (с помощью замены переменных всегда можно добиться представления в таком виде) и ДНФ $\bigvee\limits_i K_i'$.

В ходе применения критерия поглощения после удаления букв, входящих в конъюнкцию K, образована ДНФ $\mathcal{D} = \bigvee\limits_{i=1}^{r} K_i$, в которую входят $2n - q$ различных букв: $x_{q+1}, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Требуется установить, верно ли, что $\mathcal{D} \equiv 1$.

Поскольку в $\mathcal{D}$ переменные $x_1, \dots, x_q$ могут входить только в степени ноль, то их значение сразу можно положить равным 1, что сразу обнулит какую-то часть конъюнкций. Сосредоточимся на определении значения переменных $x_{q+1}, \dots, x_n$ и обнулении оставшихся конъюнкций.

1°. Рассмотрим следующий алгоритм. Для каждой из r конъюнкций K ДНФ $\mathcal{D}$ будем определять множество остальных конъюнкций, которые обнуляются при обнулении одной из букв K. Если обнуление некоторого множества букв K приводит к обнулению всех остальных конъюнкций, то таким образом найден ноль функции и алгоритм можно завершить.

Алгоритм 5: Поиск нуля функции

Вход: $\mathcal{D} = \{K_i\}_{i=1}^r$ — набор конъюнкций ДНФ $\mathcal{D}$

Выход: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — ноль ДНФ, или сообщение о том, что ноль не найден

Для $i = \overline{1, r}$ **выполнять**

  $X := \varnothing$ — множество остальных конъюнкций, обращающихся в ноль при обнулении переменных рассматриваемой конъюнкции $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$ ранга k;

  $\tilde{\alpha}^n := (0, \ldots, 0)$ — искомый ноль;

  Для $j = \overline{1, k}$ **выполнять**

    $C_j := \{$множество конъюнкций, содержащих букву $x_{i_j}^{\sigma_j}\}$;

    $X := X \cup C_j$;

    $\alpha_{i_j} := \bar{\sigma}_j$;

  Если $X = \mathcal{D}$, **то**

    все конъюнкции обнулены и нулевая точка найдена: **вернуть** $\tilde{\alpha}^n$;

Вернуть сообщение о том, что ноль не найден;

Разумеется, далеко не всегда рассматриваемая конъюнкция будет иметь пересечение по буквам с остальными конъюнкциями ДНФ.

Пример 7. Рассмотрим ДНФ, уже приведённую в качестве примера в §1.1:

$$\mathcal{D} = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \ldots \vee x_n\bar{x}_1.$$

В ней каждая буква встречается ровно один раз, и обнуление букв одной конъюнкции не приводит к обнулению никакой другой.

2°. Предложим жадный алгоритм, основанный на частоте встречаемости букв в записи ДНФ $\mathcal{D}$.

Для каждой буквы $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ определим конъюнкции, в которые они входят, и упорядочим их по убыванию встречаемости. Таким образом если первой оказалась буква $x_i^{\sigma_i}$, то мы положим значение переменной x_i равным $\bar{\sigma}_i$, что обнулит максимальное число конъюнкций. Заметим, что конъюнкции, содержание букву $x_i^{\bar{\sigma}_i}$, уже не могут быть обращены в ноль с помощью этой переменной.

Формализуем процесс установления значения переменных и вычёркивания обнулённых конъюнкций.

Для каждой ДНФ строится матрица $M \in \{0, 1, \Delta\}^{r \times n}$, где каждая строка M_i, $i = \overline{1, r}$, представляет собой запись конъюнкции K_i:

$$M_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } K_i \text{ содержит букву } \bar{x}_j, \\ 1, \text{ если } K_i \text{ содержит букву } x_j, \\ \Delta, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Когда мы фиксируем значение некоторой переменной $x_j = \sigma$, из матрицы M вычёркиваются все строки M_i, для которых $M_{ij} = \sigma$, а также сам j-й столбец матрицы. Затем процедура повторяется для следующей переменной.

Порядок обнуления переменных определяется частотой их встречаемости.

Если на каком-то этапе все строки матрицы оказались вычеркнуты, то ноль функции найден. Если в результате остался один константный столбец, целиком состоящий из нулей или из единиц, то полученная точка действительно является нулевой. В противном случае построенная комбинация не обнуляет ДНФ.

Пример 8. Рассмотрим ДНФ

$$\mathcal{D} = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1.$$

Соответствующая ей матрица имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \Delta & 1 \\ 0 & \Delta & \Delta \end{array}$$

Здесь самой часто встречающейся буквой является x_1. Положим значение этой переменной равным нулю, это обнулит первые две конъюнкции, что соответствует вычёркиванию первых двух строк матрицы:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{\Delta} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \Delta & \Delta \end{array}$$

В результате в последней конъюнкции не осталось незафиксированных букв, которые могли бы обратить её в ноль. Данный алгоритм не смог найти ноль ДНФ $\mathcal{D}$, хотя он существует, например, точка $(1, 0, 0)$.

3°. Предложим модификацию алгоритма из предыдущего пункта. Разобьём конъюнкции на группы в соответствии с их рангом. Будем упорядочивать буквы по частоте их встречаемости не среди всех конъюнкций, а среди конъюнкций наименьшего ранга.

Если среди них встретились не все переменные, то их порядок определяется встречаемостью конъюнкций на единицу большего ранга и т. д.

Такой подход основывается на «эвристике»: чем меньше букв содержит конъюнкция, тем «сложнее» её обнулить. Например, конъюнкции ранга 1 образуют необходимое условие на значение соответствующей переменной в нулевой точке.

Можно обобщить эту идею, введя весовую схему, которая будет оценивать «важность встречаемости» каждой буквы, и затем определить порядок обнуления переменных в соответствии с отсортированным по весам списком букв.

Предыдущий пример 8 показывает, что схема с одинаковыми весами может и в некоторых «несложных» случаях не привести к нахождению нуля.

Пример 9. Рассмотрим ту же ДНФ

$$\mathcal{D} = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1.$$

Конъюнкция $\bar{x}_1$ имеет наименьший ранг, поэтому первой будет обнуляться буква $\bar{x}_1$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \Delta & 1 \\ 0 & \Delta & \Delta \end{array}$$

Конъюнкция $x_1 x_3$ имеет ранг 2, поэтому второй будет обнуляться буква x_3:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \Delta & 1 \\ 0 & \Delta & \Delta \end{array}$$

Наконец, последней будет обнуляться будет буква x_2 первой конъюнкции ранга 3:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \Delta & 1 \\ 0 & \Delta & \Delta \end{array}$$

Таким образом обнаружена нулевая точка $(1, 0, 0)$.

Заключение

В рамках данной работы были получены следующие основные результаты:

- предложен новый метод построения тупиковой ДНФ, основанный на разбиении матрицы нулей на специально выбранные полосы, применимый при решении прикладных задач;
- описаны некоторые способы проверки факта поглощения конъюнкции;
- для конкретных случаев приведена верхняя оценка на число конъюнкций, образующихся в ходе метода Блейка и оставшихся в сокращённой ДНФ;
- выявлены и описаны некоторые случаи, когда метод Блейка приводит к образованию максимального и минимального числа конъюнкций;
- найдены отдельные случаи, когда критерий поглощения с использованием метода Блейка оказывается эффективнее поточечной проверки покрытия интервала конъюнкции;
- предложено несколько вариантов алгоритма поиска нуля булевой функции, заданной своей ДНФ.

Направления последующих исследований включают в себя дальнейшую оптимизацию предложенных подходов построения тупиковой ДНФ и разбор более сложных случаев применения метода Блейка.

Список литературы

[1] *Журавлёв Ю. И.* Оценки сложности алгоритмов построения минимальных дизъюнктивных форм для функций алгебры логики. // Сб. Трудов Института математики Сиб. отд. АНСССР. Дискретный Анализ. 1964. Вып. 3.

[2] *Журавлёв Ю. И., Коган А. Ю.* Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 795-799.

[3] *Журавлёв Ю. И.* О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм. // Сиб. матем. журнал. 1960. Т. 1. № 4. С. 609-610.

[4] *Журавлёв Ю. И.* Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под редакцией Яблонского С. В., Лупанова О. Б. М.:Наука, 1974

[5] *Журавлёв Ю. И., Коган А. Ю.* Алгоритм построения дизъюнктивной нормальной формы, эквивалентной произведению левых частей булевых уравнений нельсоновского типа. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 8. С. 1243-1249.

[6] *Дьяконов А. Г.* Реализация одного класса булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 5. С. 821-828.

[7] *Дьяконов А. Г.* Построение дизъюнктивных нормальных форм в задачах распознавания образов с бинарной информацией. // Докл. АН. 2002. Т. 383. № 6. С. 747-749.

[8] *Дьяконов А. Г.* Построение дизъюнктивных нормальных форм в логических алгоритмах распознавания. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 12. С. 1899-1907.

[9] *Коган А. Ю.* О дизъюнктивных нормальных формах булевых функций с малым числом нулей. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 6. С. 924-931.

[10] *Журавлёв Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 33. С. 5-68

[11] *Соколов П. Л.* Об оптимальной расшифровке монотонных функций алгебры логики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 2. С. 499-461.

[12] Сборник «Проблемы кибернетики», вып. 8, М.; издательство «Наука», 1962.