Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Домашняя работа 1: Дифференцирование

Срок сдачи: 20 сентября 2018 (четверг), 23:59

1 Для каждой из следующих функций f вычислите первую и вторую производные f' и f'':

(a) $f : E \to \mathbb{R}$ — функция $f(t) := \mathrm{Det}(A - tI_n)$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $E := \{t \in \mathbb{R} : \mathrm{Det}(A - tI_n) \neq 0\}$.

(b) $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ — функция $f(t) := \|(A + tI_n)^{-1} b\|^2$, где $A \in \mathbb{S}^n_+$, $b \in \mathbb{R}^n$.

2 Для каждой из следующих функций f вычислите градиент ∇f и гессиан $\nabla^2 f$ (относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathbb{R}^n$):

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$, где $A \in \mathbb{S}^n$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$, где $A \in \mathbb{S}^n$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \langle x, x \rangle^{\langle x, x \rangle}$.

(d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \ln(\sum_{i=1}^m e^{\langle a_i, x \rangle})$, где $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$.

3 Для каждой из следующих функций f покажите, что вторая производная $D^2 f$ является знакоопределенной (как квадратичная форма) и установите ее знак:

(a) $f : E \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \ln(-Q(x))$, где $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0\}$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $Q(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$, $A \in \mathbb{S}^n_+$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(b) $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p}$, где $p < 1$, $p \neq 0$.

(c) $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

(d) $f : \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$ — функция $f(X) := \langle X^{-1}, A \rangle$, где $A \in \mathbb{S}^n_+$.

(e) $f : \mathbb{S}^n_{++} \to \mathbb{R}$ — функция $f(X) := (\mathrm{Det}(X))^{1/n}$.

(*Подсказка*: В некоторых пунктах могут оказаться полезными неравенства Коши–Буняковского и Йенсена.)

4 Для каждой из следующих функций f найдите все точки стационарности и определите их тип (локальный минимум, локальный максимум, седловая точка):

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := 2x_1^2 + x_2^2(x_2^2 - 2)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$, где $A \in \mathbb{S}^n$.

5 Пусть c — ненулевой вектор в $\mathbb{R}^n$, $\sigma > 0$, и пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция

$$f(x) := \langle c, x \rangle + \frac{\sigma}{3}\|x\|^3.$$

Найдите единственную точку стационарности функции f.