МОМО-16. Домашняя работа 3

Срок сдачи: 14 ноября 2016, 10:30

1 Доказать, что функция $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, определенная по формуле

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2},$$

является выпуклой на своей области определения и найти ее субдифференциал $\partial f(x)$ в заданной точке $x \in [-1, 1]$.
(*Подсказка:* Для нахождения $\partial f(x)$ в точках $x = \pm 1$ воспользуйтесь определением субдифференциала.)

2 Для каждой из следующих функций найти субдифференциал $\partial f(x)$ в заданной точке $x \in \mathbb{R}^n$:

(a) $f(x) = \|x\|_\infty$.

(b) $f(x) = \sum\limits_{1 \le i < j \le n}^{n} c_{ij} |x_i - x_j|$, где $c_{ij} > 0$ для всех $1 \le i < j \le n$.
(*Подсказка:* Сначала найдите судифференциал функции $(x_1, x_2) \mapsto |x_1 - x_2|$ с помощью правила вычисления субдифференциала композиции $\phi(Ax)$, а затем используйте этот результат для нахождения $\partial f(x)$.)

Изобразить множество $\partial f(x)$ на картинке для $n = 2$ и следующих точек: 1) $x = (0, 1)$; 2) $x = (1, 1)$; 3) $x = (1, -1)$; 4) $x = (0, 0)$.

3 Найти решение x^* следующей выпуклой задачи:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|x - a\|_2^2 + \tau \|x\|_2 \right\},$$

где $a \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — некоторые параметры.