АДАПТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА ОБОЩЕННОГО СГЛАЖИВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

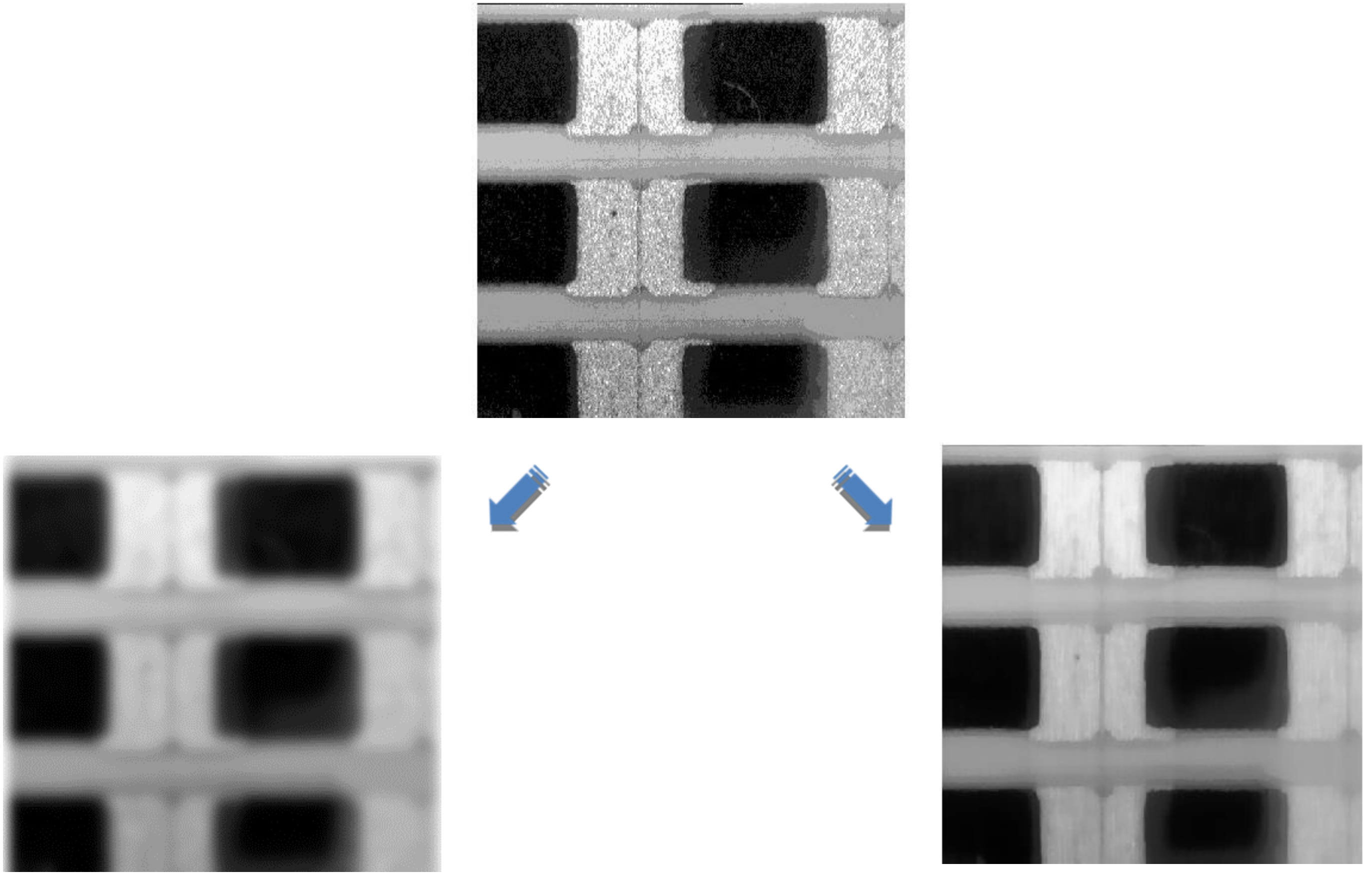
Грачева Инесса Александровна, *gia1509@mail.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет,*

Копылов Андрей Валериевич, *канд. т.н. наук, доц., and.kopylov@gmail.com, Россия, Тула, Тульский государственный университет,*

Красоткина Ольга Вячеславовна, *канд. ф.-м. наук, доц., O.V.Krasotkina@yandex.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №13-07-00529

Задача сглаживания с сохранением границ



Постановка задачи

Байесовский подход к задаче сглаживания является, пожалуй, одним из самых концептуально привлекательных и популярных подходов. В рамках данного подхода, задача восстановления изображений может быть выражена как задача оценивания скрытой марковской компоненты $X = (x_t, t = 1, \ldots, N)$ двухкомпонентного случайного поля, роль наблюдаемой компоненты которого играет анализируемое изображение $Y = (y_t, t \in T)$

Использование в качестве функции потерь, сингулярной функции, штрафующей сам факт отличия полученной оценки скрытого поля $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in T)$ от «истинного» значения приводит к оптимизационной задаче поиска максимума апостериорного распределения скрытой компоненты, относительно наблюдения.

Вероятностная модель данных

Вероятностные свойства двухкомпонентного случайного поля (X,Y) полностью определяются совместной условной плотностью вероятности $\Phi(Y\,|\,X,\delta)$ исходной функции $Y=(y_t, t=1,...,N)$ по отношению к вторичному массиву данных $X=(x_t, t=1,...,N)$, и априорным распределением $\Psi(X\,|\,\Lambda,\delta)$ скрытой компоненты .

$$\Phi(Y\,|\,X,\delta)=\frac{1}{\delta^{N/2}(2\pi)^{N/2}}\exp(-\frac{1}{2\delta}\sum_{t=1}^{N}(y_t-x_t)^2)$$

Априорное совместное распределение оценок последовательности $X=(x_t, t=1,...,N)$ условно нормальны по отношению к изменяющейся во времени последовательности факторов $\Lambda=(\lambda_t, t=2,...,N)$. Таким образом, мы пришли к априорному совместному распределению вида

$$\Psi(X\,|\,\Lambda,\delta)\propto\frac{1}{\left(\prod_{t=2}^{N}\delta\lambda_t\right)^{1/2}(2\pi)^{n(N-1)/2}}\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t',t''\in V}\frac{1}{\delta\lambda_{t'}}(x_{t'}-x_{t''})^2\right)$$

Гамма - распределение

Гамма - распределений случайных величин $1/\lambda_t$

$$\gamma(1/\lambda_t \mid \alpha, \vartheta) \propto (1/\lambda_t)^{\alpha-1} \exp(-\vartheta(1/\lambda_t)) \Rightarrow \gamma(1/\lambda_t \mid \delta, \lambda, \mu) \propto (1/\lambda_t)^{\frac{2\mu+1}{2\delta\mu}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\delta\mu}(1/\lambda_t)\right)$$

с математическими ожиданиями и дисперсиями

$$E(1/\lambda_t) = \frac{\alpha}{\vartheta}, Var(1/\lambda_t) = \frac{\alpha}{\vartheta^2} \Rightarrow E(1/\lambda_t) = \frac{(1+\delta)\mu+1}{\lambda}, Var(1/\lambda_t) = 2\delta\mu \frac{(1+\delta)\mu+1}{\lambda^2}$$

Априорное распределение имеет вид:

$$G(\Lambda \mid \alpha, \vartheta) = \prod_{t=2}^{N} \gamma(\lambda_t \mid \alpha, \vartheta) \propto \left(\prod_{t=2}^{N} \frac{1}{\lambda_t}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\vartheta \sum_{t=2}^{N} \frac{1}{\lambda_t}\right) =$$

$$= \exp\left[-(\alpha-1)\sum_{t=2}^{N} \ln \lambda_t - \vartheta \sum_{t=2}^{N} \frac{1}{\lambda_t}\right]$$

$$\Rightarrow G(\Lambda \mid \delta, \lambda, \mu) = \exp\left[-\frac{1}{2\delta\mu} \sum_{t=2}^{N} \left(\lambda \frac{1}{\lambda_t} + \frac{1}{\lambda} \ln \lambda_t\right)\right],$$

при $\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + 1\right], \vartheta = \frac{\lambda}{2\delta\mu}$

Нормальное гамма - распределение

Совместное априорное нормальное гамма - распределение обоих скрытых последовательностей $X = (x_t, t = 1, ..., N)$ и $\Lambda = (\lambda_t, t = 2, ..., N)$:

$$H(X, \Lambda \mid \delta, \lambda, \mu) = \Psi(X \mid \Lambda, \delta) G(\Lambda \mid \delta, \lambda, \mu)$$

В сочетании с условной плотностью, это дает основу для байесовского оценивания вектора параметров $X = (x_t, t = 1, ..., N)$.

Байесовское оценивание вектора параметров

Совместное апостериорное распределение скрытых последовательностей:

$$P(X,\Lambda\,|\,Y,\delta,\alpha,\vartheta)=\frac{\Psi(X\,|\,\Lambda,\delta)G(\Lambda\,|\,\alpha,\vartheta)\Phi(Y\,|\,X,\delta)}{\int\int\Psi(X'\,|\,\Lambda',\delta)G(\Lambda'\,|\,\alpha,\vartheta)\Phi(Y\,|\,X',\delta)dX'd\Lambda'}$$

Байесовская оценка (X,Λ):

$$\begin{cases}(X,\Lambda\,|\,\lambda,\mu)=\arg\min\limits_{X,\Lambda} J(X,\Lambda\,|\,Y,\lambda,\mu),\\ J(X,\Lambda\,|\,Y,\lambda,\mu)=\sum\limits_{t=1}^{N}(y_t-x_t)^2+\\ +\sum\limits_{t=2}^{N}\left\{\frac{1}{\lambda_t}\left[(x_t-x_{t-1})^2+\lambda/\mu\right]+(1+1/\mu)\ln\lambda_t\right\}.\end{cases}$$

Алгоритм сохранения границ

Условно оптимальные изменяющиеся во времени факторы $\Lambda(X,\lambda,\mu)=[\lambda_t(X,\lambda,\mu), t=2,...,N]$ определяются независимо друг от друга:

$$\Lambda(X,\lambda,\mu)=\arg\min_{\Lambda} J(\Lambda \mid X,\lambda,\mu):$$

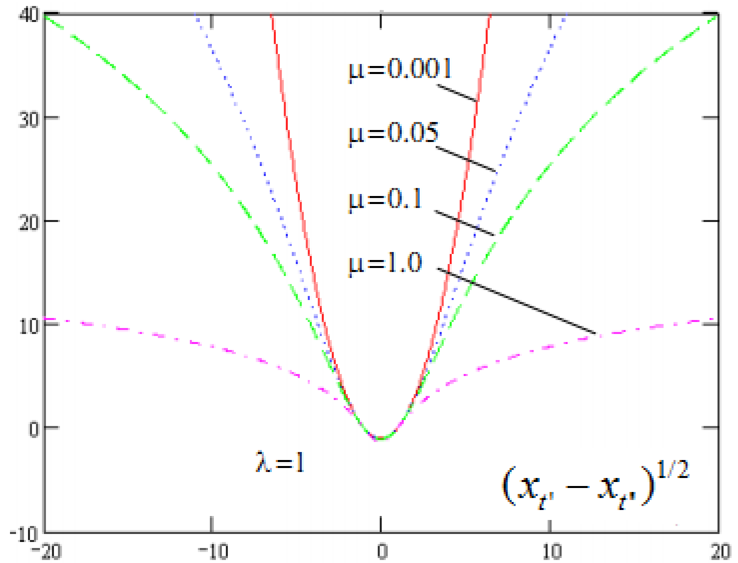
$$\frac{\partial}{\partial\lambda_t}\left\{\frac{1}{\lambda_t}[(x_t-x_{t-1})^2+\lambda/\mu]+(1+1/\mu)\ln\lambda_t\right\}=0$$

Нулевые условия для производных, за исключением тривиальных решений $\lambda_t \to \infty$, приводят к равенствам

$$\frac{1}{\lambda_t}\left[(x_t-x_{t-1})^2+\lambda/\mu\right]=(1+1/\mu), \quad \Rightarrow \quad \lambda_t(X,\lambda,\mu)=\lambda\frac{(1/\lambda)(x_t-x_{t-1})^2+1/\mu}{1+1/\mu}$$

«Эффект насыщения»

$$(1+1/\mu)\ln\frac{(1/\lambda)(x_{t'}-x_{t''})^2(1/\mu)}{1+1/\mu}$$



"Эффект насыщения" из за штрафа при достаточно большом значении параметра μ и фиксированном значении λ = 1.

Процедура Гаусса - Зайделя

На каждой итерации текущая последовательность $\widehat{\Lambda}^k = (\widehat{\lambda}_t^k = 1, t = 1, \ldots, N)$ при $\widehat{\Lambda}^0 = (\widehat{\lambda}_t^0 = \lambda, t = 2, \ldots, N)$ позволяет вычислить вектор параметров $X = (x_t, t = 1, \ldots, N)$, причем минимизация целевой функции дает новое приближение к оценке последовательности взаимосогласованных оценок $\widehat{X}^k = (\widehat{x}_t^k, t = 1, \ldots, N)$:

$$\widehat{X}^k = (\widehat{x}^k, t = 1, \ldots, N) = \arg\min_X J(X, \Lambda^k \mid Y, \lambda, \mu) =$$

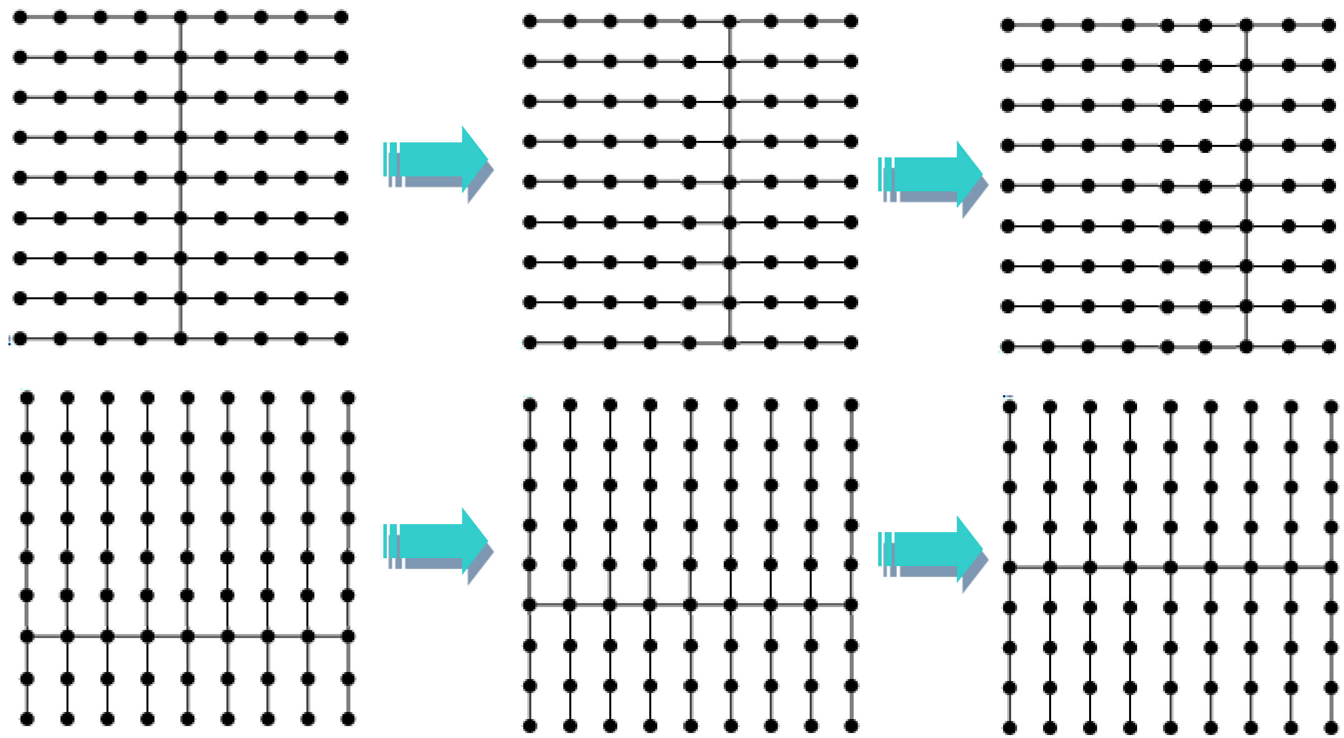
$$= \arg\min_X \left\{ \sum_{t=1}^{N} (y_t - x_t)^2 + \sum_{t', t'' \in V} \frac{1}{\lambda_{t'}} (x_{t'} - x_{t''})^2 \right\}$$

После нахождения оценок $\widehat{X}^k = (\widehat{x}_t^k, t = 1, \ldots, N)$, находим очередное приближение к оценкам факторов $\widehat{\Lambda}^k = (\widehat{\lambda}_t^k = 1, t = 1, \ldots, N)$, которые дают решение задачи условной оптимизации

$$\widehat{\Lambda}^{k+1} = \arg\min_\Lambda J(\widehat{X}^k, \Lambda \mid Y, \lambda, \mu) =$$

$$= \arg\min_\Lambda \left\{ \sum_{t=1}^{N} (y_t - x_t)^2 + \sum_{t', t'' \in V} \frac{1}{\lambda_{t'}} (\widehat{x}_{t'}^k - \widehat{x}_{t''}^k)^2 \right\}$$

Древовидная аппроксимация



Экспериментальные результаты сравнения алгоритмов

Алгоритм/Изображение	Cameraman 256x256		Barbara 512x512	
	PSNR	Время (c)	PSNR	Время (c)
Haar-Fisz	29.73	1.3	28.36	1.3
BLS-GSM	30.85	4.6	31.24	4.6
Platelet	31.03	891	29.55	1112
Наш алгоритм	30.77	0.5	28.98	0.8

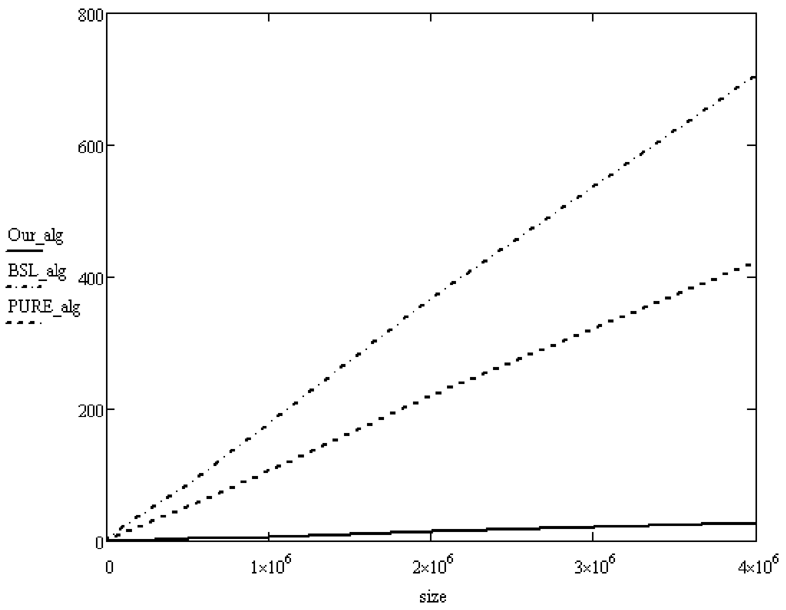
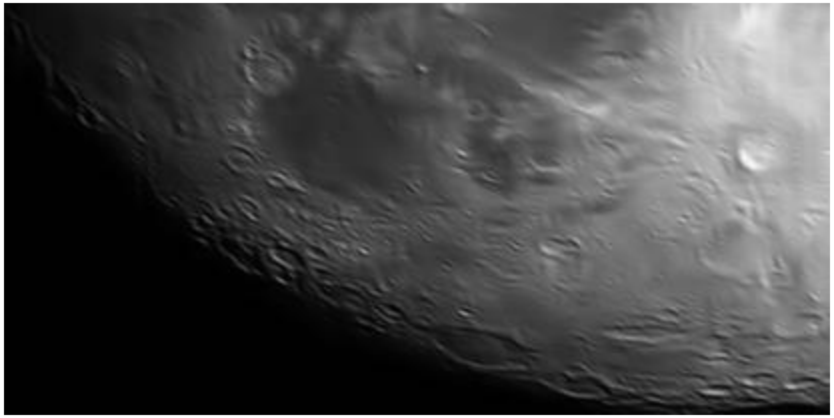


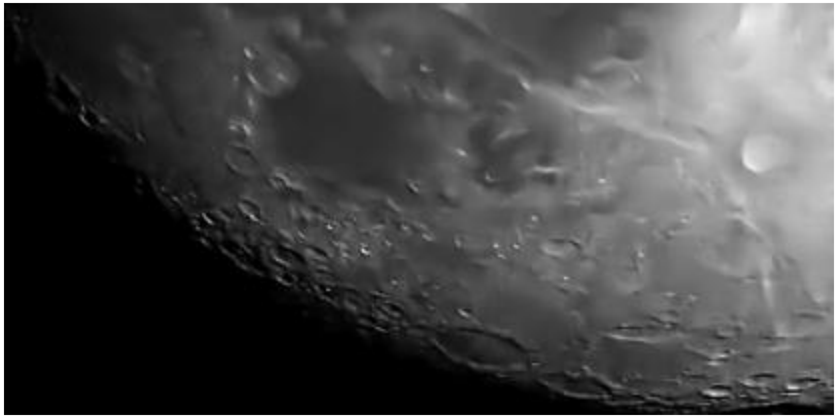
График зависимости времени работы алгоритма от размера изображения

Экспериментальные результаты сравнения алгоритмов

Haar алгоритм



BLS – GSM



Platelet

Наш алгоритм

Экспериментальные результаты

а)

б)

в)

Результаты сглаживания изображения: а) исходное изображение; б) зашумленное изображение; в) – восстановленное изображение.

Экспериментальные результаты

а) б) в)

Результаты сглаживания изображения: а) исходное изображение; б) зашумленное изображение; в) – восстановленное изображение.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!