# Задача отделимости (Separation problem) опорных неравенств для задачи аппроксимации графа

Р.Ю.Симанчев, А.В. Кононов, И.В.Уразова

Светлогорск – 2015

# Постановка задачи

$K_n = (V, E)$ полный $n$-вершинный граф без петель и кратных ребер, $G \subset K_n$.

$\mu(V)$ семейство всех подграфов графа $K_n$, компоненты связности которых являются кликами (М-графы).

## Задача аппроксимации графа

Найти такой $M^* \in \mu(V)$ что

$$\rho(G, M^*) = min\{\rho(G, M)|M \in \mu(V)\}$$

где $\rho(G, M) = |EG \cup EM| - |EG \cap EM|$.

# Многогранник задачи

$R^E$ – пространство, ассоциированное с множеством $E$.

Вектором инциденций графа $H \subseteq K_n$ называется вектор

$$x^H \in R^E = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in EH; \\ 0, & \text{если } e \notin EH. \end{cases}$$

**Многогранник задачи аппроксимации графа**

$$P = conv\{x^M \in R^E | M \in \mu(V)\}.$$

$dimP = |E|$

# Релаксация многогранника

## Теорема 1.

Многогранник $P$ совпадает с выпуклой оболочкой целочисленных решений системы

$$\begin{aligned} x_{uv} + x_{u\omega} - x_{v\omega} &\le 1 \\ x_{uv} - x_{u\omega} + x_{v\omega} &\le 1 \\ -x_{uv} + x_{u\omega} + x_{v\omega} &\le 1 \\ x_{uv} &\ge 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u, v, \omega \in V$ всевозможные тройки попарно различных вершин.

## Целевая функция

$$f(x) = |EG| + \sum_{e \in E\bar{G}} x_e - \sum_{e \in EG} x_e .$$

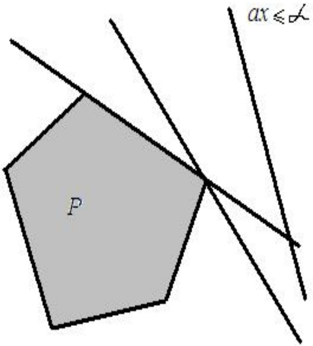
# Правильность, опорность, фасетность

Линейное неравенство $ax \leq \alpha$ называется правильным относительно многогранника $P$, если ему удовлетворяет любая точка из $P$.

Правильное неравенство называется опорным, если оно порождает непустую собственную грань многогранника $P$.

Опорное неравенство называется фасетным, если оно порождает собственную грань максимальной размерности.

# Правильность, опорность, фасетность

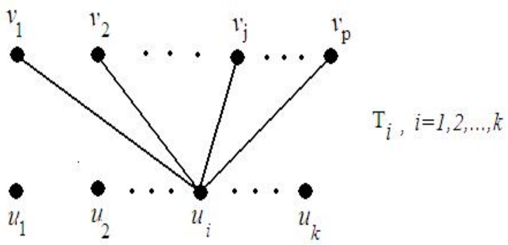



**Теорема 2.**

Каждое ограничение системы (1) является фасетным относительно многогранника $P$.

# Фасетные неравенства

$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset V$, $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$, $U \cap W = \emptyset$,
Для $u_i \in U$ обзначим через $T_i \subset K_n$ – звезда с центром в $u_i \in U$ и лучами $u_i v_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$.



# Фасетные неравенства

$T = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$, $K$ клика на множестве $W$

Граф $T \cup K$ назовем $k$-парашютом.

Определим линейное неравенство для $k$-парашюта $T \cup K$

$$\sum_{e \in ET} x_e - \sum_{e \in EK} x_e \leq \frac{k^2 + k}{2} \qquad (2)$$

**Теорема 3.**

Неравенство вида (2) опорно относительно многогранника $P$, если и только если $p \geq k$.

**Теорема 4.**

Неравенство, индуцированное $k$-парашютом $T \cup K_p$, порождает фасету многогранника $M$-графов тогда и только тогда, когда $k = 1$.

Пусть $\mathcal{A} = \{ax \leq \alpha\}$ класс неравенств, правильных относительно многогранника $P$; $\bar{x} \in \mathbb{R}^E$.
Среди неравенств класса $\mathcal{A}$ найти такое, что $a\bar{x} > \alpha$, либо доказать, что такого неравенства в классе $\mathcal{A}$ нет.

**Теорема 5.**

Задача идентификации для класса неравенств, индуцированных 1-парашютом $NP$-трудна.

Спасибо за внимание