Задача дуализации над произведением цепей: асимптотика типичного числа решений

Дюкова Е.В. edjukova@mail.ru , ФИЦ ИУ РАН

Масляков Г.О. gleb-mas@mail.ru , ВМК МГУ

Прокофьев П.А. p_prok@mail.ru , ИМАШ РАН

12-я Международная конференция «Интеллектуализация обработки информации(ИОИ-2018)

г. Гаэта, Италия

Постановка задачи

Пусть $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, где $P_1, \dots, P_n$ – конечные упорядоченные множества целых чисел (цепи). Элемент $y = (y_1, \dots, y_n) \in P$ следует за элементом $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$, если y_i следует за x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ (x предшествует y). Запись $x \prec y$ означает, что $y \in P$ следует за $x \in P$ и $y \neq x$.

Пусть $R \subseteq P$, R^+ – множество элементов в P, следующих за R. Элемент x множества $P \backslash R^+$ называется *максимальным независимым от* R^+ элементом, если для любого другого элемента y множества $P \backslash R^+$ отношение $x \prec y$ не выполняется. Требуется построить множество $I(R^+)$, состоящее из всех максимальных независимых от R элементов множества P.

Пусть $R \subseteq P$, R^- – множество элементов в P, предшествующих R. Элемент x множества $P \backslash R^-$ называется *минимальным независимым от* R^- элементом, если для любого другого элемента y множества $P \backslash R^-$ отношение $y \prec x$ не выполняется. Требуется построить множество $I(R^-)$, состоящее из всех минимальных независимых от R^- элементов множества P.

Дуализация монотонной КНФ

Дана КНФ, реализующая монотонную булеву функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$. Требуется построить сокращенную ДНФ функции F.

Здесь $P -$ n-мерный булев куб и задан порядок $0 < 1$.

Задача сводится либо к построению $I(R^-)$ (R – множество «верхних нулей» функции F), либо к построению $I(R^+)$ (R – множество «нижних единиц» функции $dualF$, которая строится по исходной КНФ заменой знаков ∧ и ∨ соответственно на знаки ∨ и ∧).

Эквивалентные задачи:
1) перечисление неприводимых покрытий булевой матрицы **(дуализация булевой матрицы)**; 2) перечисление минимальных вершинных покрытий гиперграфа **(дуализация гиперграфа)**.

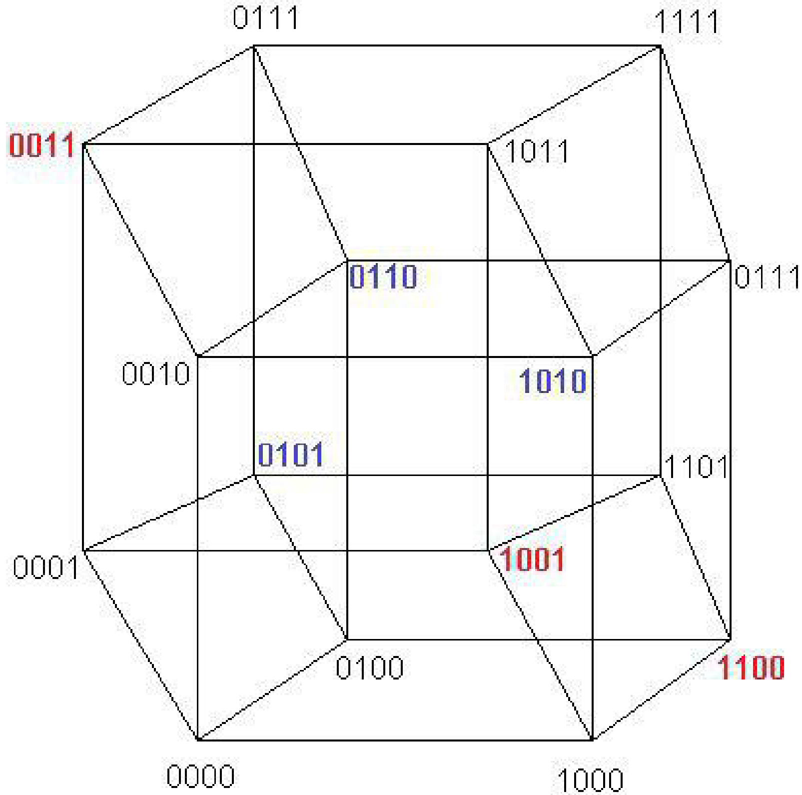
Важность монотонной дуализации и её обобщений обусловлена большим числом приложений, среди которых важное место принадлежит машинному обучению (построению логических процедур классификации).

Пример дуализации монотонной КНФ

Задана $F = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_4)(x_3 \vee x_4)$ – монотонная (тупиковая) КНФ.

$R = \{(0,0,1,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ – множество «верхних нулей» функции F (R – антицепь, т.к. любые два элемента в R не сравнимы).

$I(R^-) = \{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$ (множество «нижних единиц» функции F) задаёт искомую сокращённую ДНФ: $x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4$.



Подходы к построению эффективных алгоритмов дуализации и полученные ранее результаты

1) **Алгоритм с полиномиальной задержкой** имеет полиномиальный от размера входа шаг. Оценка сложности шага алгоритма даётся для худшего случая (для самого сложного варианта задачи). Полиномиальные алгоритмы построены лишь для некоторых частных случаев монотонной дуализации.

2) **Инкрементальный квазиполиномиальный алгоритм** имеет квазиполиномиальный от размера входа и размера выхода шаг. Оценка сложности шага алгоритма даётся для худшего случая. В 1996 г. М. Фредман и Л. Хачиян построили инкрементальный квазиполиномиальный алгоритм монотонной дуализации. В 2002 г. К.М. Эльбассиони обобщил результат на случай цепей.

3) **Асимптотически оптимальный алгоритм** имеет полиномиальный от размера входа шаг, однако делает «лишние» шаги. Число «лишних» шагов почти всегда (для почти всех вариантов задачи) достаточно мало по сравнению с числом всех шагов. В 1977 г. Е.В. Дюкова построила асимптотически оптимальный алгоритм дуализации булевой матрицы.

Цель работы

Асимптотически оптимальные алгоритмы дуализации булевой матрицы являются лидерами по скорости счёта. Наиболее быстрый - алгоритм RUNC-M (Е.В. Дюкова, П.А. Прокофьев, 2015 г.).

На базе алгоритма RUNC-M построен и экспериментально исследован алгоритм поиска максимальных независимых элементов произведения цепей RUNC-M+ (Е.В. Дюкова, Г.О. Масляков, П.А. Прокофьев, 2017 г.). По скорости счёта RUNC-M+ существенно опережает инкрементальный алгоритм К.М. Эльбассиони.

Целью настоящей работы явилось доказательство асимптотической оптимальности алгоритма RUNC-M+, заключающееся в установлении асимптотического равенства двух величин: типичного числа шагов алгоритма RUNC-M+ и типичного числа решений задачи (мощности $I(R^+)$). Фактически требовалось усовершенствовать технику получения асимптотических оценок, применявшуюся ранее для обоснования асимптотической оптимальности алгоритмов дуализации булевой матрицы.

Матричная формулировка задачи дуализации над произведением цепей (1)

L – матрица из n столбцов с элементами из $\{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \geq 2$;
$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $r \leq n$, - набор, в котором $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Опр. Квадратная подматрица порядка r матрицы L называется *упорядоченной σ -подматрицей*, если с точностью до перестановки строк она имеет вид

$$Q(\sigma) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{r-1} & \beta_r \\ \beta_1 & \gamma_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{r-1} & \beta_r \\ & & & \dots & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{r-1} & \gamma_r \end{pmatrix},$$

где $\gamma_i = \sigma_i + 1$ и $\beta_i \leq \sigma_i$ при $i = 1, 2, \dots, r$.

Если L – булева матрица и $\sigma = (0, \dots, 0)$, то $Q(\sigma) -$ единичная матрица, в которой $\gamma_i = 1$ и $\beta_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, r$.

Матричная формулировка задачи дуализации над произведением цепей (2)

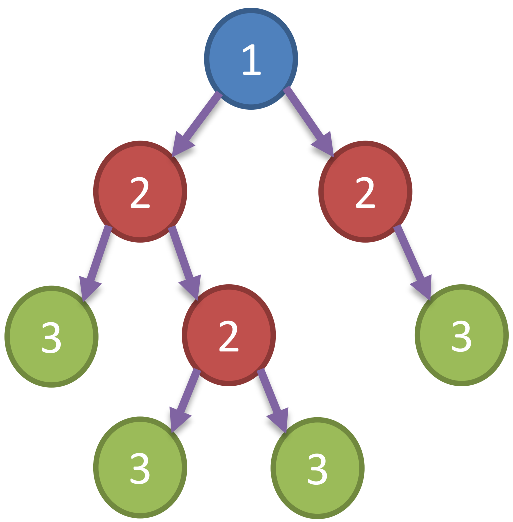
Опр. Набор столбцов H матрицы L называется *упорядоченным тупиковым* σ *-покрытием,* если выполнены два условия: 1) H – не содержит строку $(\beta_1, \dots, \beta_r)$, где $\beta_i \le \sigma_i$ при $i = 1, 2, \dots, r$; 2) H содержит упорядоченную σ *-подматрицу*.

Условие 1) – условие *покрываемости*, условие 2) – условие *совместимости*. Если L – булева матрица и $\sigma = (0, 0, \dots, 0)$, то введённое понятие упорядоченного тупикового σ -покрытия совпадает с понятием *неприводимого покрытия булевой матрицы*.

Утв. *Задача поиска максимальных независимых элементов произведения* n *цепей, каждая из которых имеет мощность* k, *эквивалентна перечислению упорядоченных тупиковых покрытий матрицы* L_R *из* $|R|$ *строк и* n *столбцов с элементами из* $\{0, 1, \dots, k-1\}$.

Схема работы алгоритма RUNC-M+

Алгоритм RUNC-M+ перечисляет с полиномиальной задержкой некоторое множество $N(L_R)$ наборов столбцов матрицы L_R, удовлетворяющих условию совместимости 2). Работу алгоритма можно представить в виде обхода дерева решений в глубину.



1 – пустой набор

2 – упор. совместимый набор столбцов

3 – «максимальный» упор. совместимый набор столбцов, который либо является упорядоченным тупиковым покрытием, либо соответствует лишнему шагу.

- Каждая дочерняя вершина внутренней вершины H образуется добавлением к H в точности одного столбца. Шаг алгоритма – построение висячей вершины. Каждый шаг осуществляется за полиномиальное время от размера входа задачи. Множество висячих вершин $N(L_R)$ содержит множество всех упорядоченных тупиковых покрытий $B(L_R)$ матрицы L_R.

Основная теорема (1)

Асимптотическая оптимальность алгоритма RUNC-M+ следует из основной теоремы 1, формулировка которой приведена далее. При условии, что $n \to \infty$ и $|R|$ имеет более низкий порядок роста, чем n, доказано асимптотическое равенство типичных значений величин $|N(L_R)|$ и $|B(L_R)|$.

M_{mn}^k – совокупность всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\{0, 1, \ldots, k-1\}, k \geq 2$;

E_{k-1}^r, $r \leq n$, – совокупность всех наборов вида $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, где $\sigma_i \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$;

$\prod(\sigma) = (\sigma_1 + 1)^{r-1} \cdot \cdots \cdot (\sigma_r + 1)^{r-1}, \sigma \in E_{k-1}^r, \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$;

φ_d – интервал

$$\left(\frac{1}{2} log_d mn - \frac{1}{2} log_d log_d mn - log_d log_d log_d n,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2} log_d mn - \frac{1}{2} log_d log_d mn + log_d log_d log_d n\right)$$

Основная теорема (2)

$B(L), L \in M_{mn}^{k}$, – множество всех упорядоченных тупиковых покрытий матрицы L;

$S(L), L \in M_{mn}^{k}$, – множество всех упорядоченных подматриц матрицы L.

Теорема 1. *Если* $m^{\alpha} \leq n \leq d^{m}$, $\alpha > 1$, $d = k/(k-1)$, *то для почти всех матриц* $L \in M_{mn}^{k}$ *при* $n \to \infty$ *справедливо*

$$|B(L)| \sim |S(L)| \sim \sum_{r \epsilon \varphi_d} \sum_{\sigma \epsilon E_{k-1}^{r}} \prod (\sigma) C_n^r \, C_m^r r! \, k^{-r^2}$$

и длины почти всех упорядоченных тупиковых покрытий матрицы L *принадлежат интервалу* φ_d .

Следствие из теоремы 1 (случай $k = 2$)

Теорема 2. *Если* $m^{\alpha} \le n \le 2^{m}$, $\alpha > 1$, *то для почти всех матриц* $L \in M_{mn}^{2}$ *при* $n \to \infty$ *справедливо*

$$|B(L)| \sim |S(L)| \sim \sum_{r \epsilon \varphi_2} C_n^r C_m^r r!\, 2^{-r^2}$$

и длины почти всех неприводимых покрытий матрицы L *принадлежат интервалу* φ_2 .

Приведённые в теореме 2 оценки первоначально получены в работах:

1. *Дюкова Е. В.* Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов // ДАН СССР, 1977. Т. 233. № 4. С. 527–530.

2. Дюкова Е.В. О сложности реализации некоторых процедур распознавания // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Том 27. № 1. С. 114–127.