# Формирование инвестиционного портфеля по неточной информации о доходностях активов

**Моттль Вадим Вячеславович**
Вычислительный центр РАН

**Красоткина Ольга Вячеславовна**
Markov Processes International, New Jersey, USA

**Черноусова Елена Олеговна**
Московский физико-технический институт

**Рыбка Елизавета Михайловна**
Париж, Франция, Ecole Polytechnique

# Доходности биржевых активов и доходность инвестиционного портфеля

Предположение о доходностях биржевых активов в предстоящем периоде владения
$x_i, i = 1,...,n$

Инвестиционный портфель – долевое распределение капитала

$$\beta_i, i = 1,...,n, \quad \beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

Доходность портфеля равна линейной комбинации доходностей активов

$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ – модель Шарпа

Как выбрать портфель?

Инвестор не знает, какие будут доходности активов в предстоящем периоде владения

Естественно рассматривать вектор доходностей $\mathbf{x} = \left( x_1 \cdots x_n \right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ как случайный

Инвестор может руководствоваться лишь предполагаемым распределением вероятностей $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$

# Представление о доходностях биржевых активов как о случайном векторе

Моменты первого и второго порядков:

математическое ожидание $\bar{\mathbf{x}} = \left[ E\{x_1\} \cdots E\{x_n\} \right] \in \mathbb{R}^n$

ковариационная матрица $\mathbf{G} = \left[ Cov\{x_i, x_j\} \right] (n \times n)$

Свойство рынка:
чем больше $E\{x_1\}$,
тем больше $Var\{x_i\}$

Тогда доходность портфеля $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ – тоже случайная величина

Математическое ожидание $E\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E\{x_i\} = \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}$,

Дисперсия $Var\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov\{x_i, x_j\} \beta_i \beta_j = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\beta}$

Как может мыслить инвестор, выбирая портфель $\beta = (\beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_n \geq 0)$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$?

Максимум доходности $E\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E\{x_i\} = \boxed{\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta} \to \max}$

Минимум риска потери капитала $Var\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov\{x_i, x_j\} \beta_i \beta_j = \boxed{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\beta} \to \min}$

**Эти два желания несовместны. Кто не рискует, тот не пьет шампанского!**

# Теория эффективных портфелей Марковица

Множество Парето – все портфели $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$, неулучшаемые по обоим критериям

| минимум риска, фиксированная доходность | максимум доходности, фиксированный риск |
|---|---|
| $\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} \to \min \\ \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$ | $\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \to \max \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} = const \end{cases}$ |

Множество эффективных портфелей Марковица

$(\boldsymbol{\beta}^* \mid \alpha) = \arg\min\Big[(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{\beta} - \alpha\bar{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\Big],\qquad 0 \le c < \infty$ – параметр Risk Tolerance

**Проблема: Инвестор не знает распределения доходностей активов, в частности, его моментов $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G})$.**

Он может использовать только некоторые их оценки, сами по себе являющиеся случайной парой «вектор-матрица».

**Наше предложение: Судить о совместном распределении пары $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G})$ в терминах параметрического семейства Гаусса-Уишарта**

$F(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{G}) = \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}} \mid)\mathcal{W}(\mathbf{G} \mid)$

В качестве семейства совместныз

Всегда можно рассматривать плотность распределения как произведение

Моменты первого и второго порядков:
математическое ожидание $\overline{\mathbf{x}} = \left[ E\{x_1\} \cdots E\{x_n\} \right] \in \mathbb{R}^n$
ковариационная матрица $\mathbf{G} = \left[ Cov\{x_i, x_j\} \right] (n \times n)$

Свойство рынка:
чем больше $E\{x_1\}$,
тем больше $Var\{x_i\}$

Тогда доходность портфеля $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ – тоже случайная величина

Математическое ожидание $E\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E\{x_i\} = \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}$,

Дисперсия $Var\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov\{x_i, x_j\} \beta_i \beta_j = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\beta}$

Как может мыслить инвестор, выбирая портфель $\beta = (\beta_1 \geq 0, ..., \beta_n \geq 0)$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$?

Максимум доходности $E\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E\{x_i\} \to \max$

Минимум риска потери капитала $Var\{y\} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov\{x_i, x_j\} \beta_i \beta_j \to \min$

**Эти два желания несовместны!**

Согласно принципу нобелевского лауреата Гарри Марковица, распределение капитала инвестора по множеству биржевых активов образует эффективный портфель только при соблюдении баланса Парето между двумя противоречивыми желаниями – увеличить капитал и уменьшить риск его потери. Эти два критерия определяются вектором средних значений и ковариационной матрицей случайных будущих доходностей. В итоге оказывается, что эта пара и свободно выбираемый коэффициент склонности инвестора к риску (Risk Tolerance) вместе полностью определяют однопараметрическое семейство портфелей Марковица, которое исчерпыват множество всех "разумных" портфелей. Однако инвестору доступны лишь оценки ожидаемых доходностей и их ковариаций, сами по себе образующие случайную пару "векторматрица". В даной работе мы используем распределение Гаусса-Уишарта на множестве таких пар как единое параметрическое семейство априорных и апостериорных распределений, наделяющее понятие эффективного портфеля Марковица способностью учитывать неточность знания будущих доходностей биржевых активов. В частности, мы рассматриваем некоторые специальные случаи при разных сочетаниях степеней недоверия к предполагаемым средним значениям и ковариациям доходностей.