

Московский Физико-Технический Институт  
(Государственный Университет)

Факультет Управления и Прикладной Математики  
Кафедра «Интеллектуальные Системы»

## **ДИПЛОМНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 774 ГРУППЫ**

### **«Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных»**

Выполнил:

студент 4 курса 774 группы

*Кузнецов Михаил Павлович*

Научный руководитель:

к.ф-м.н., н.с. ВЦ РАН

*Стрижов Вадим Викторович*

Москва, 2011

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Определения и обозначения . . . . .	5
1.2	Постановка задачи с использованием конусов . . . . .	6
1.3	Свойства многогранных конусов . . . . .	8
1.4	Решение задачи минимизации расстояния между векторами в конусах .	11
1.5	Решение задачи максимизации корреляции между векторами в конусах	12
1.6	Постановка задачи с использованием монотонной интерполяции . . . .	13
1.7	Решение задачи монотонной интерполяции с гиперпараметром . . . . .	14
1.8	Алгоритм решения задачи монотонной интерполяции . . . . .	16
1.9	Результат работы алгоритма монотонной интерполяции . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Вычислительный эксперимент</b>	<b>17</b>
2.1	Исходные данные . . . . .	17
2.2	Результаты эксперимента . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Заключение</b>	<b>19</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>19</b>

## Аннотация

Описан способ построения интегральных индикаторов качества объектов с использованием экспертных оценок и измеряемых данных. Каждый объект описан набором признаков в линейных шкалах. Используются экспертные оценки качества объектов и важности признаков, которые корректируются в процессе вычисления. Предполагается, что оценки выставлены в ранговых шкалах. Рассматривается задача получения таких интегральных индикаторов, которые не противоречили бы экспертным оценкам. Предложено два подхода к уточнению экспертных оценок. При первом подходе вектор экспертных оценок рассматривается как выпуклый многогранный конус. Для уточнения экспертных оценок минимизируется расстояние между векторами в конусах. При втором подходе используется задача монотонной интерполяции с гиперпараметром. Проведен вычислительный эксперимент на следующих данных: экспертами оценивался фактор экологического воздействия на окружающую среду хорватских электростанций. Проведена процедура уточнения экспертных оценок.

# 1 Введение

При решении задач управления объектами возникает необходимость дать каждому объекту оценку его качества [1, 2, 3, 4]. «Качество — совокупность свойств объекта, обуславливающих его способность удовлетворять определенные потребности в соответствии с его назначением» [5]. Интегральный индикатор — это число, поставленное в соответствие объекту, и рассматриваемое как оценка его качества. Интегральными индикаторами называется вектор оценок, поставленный в соответствие набору объектов.

При построении интегральных индикаторов выбирается критерий качества объектов. «Критерий — признак, на основании которого производится оценка, сравнение альтернатив, классификация объектов и явлений» [5]. Формируется набор объектов, сравнимых в контексте выбранного критерия. Формируется набор показателей, которые эксперты считают необходимыми для описания этого критерия. Составляется матрица «объекты-признаки». Значения показателей приводятся к единой шкале и соответствуют принципу «чем больше, тем лучше»: большему значению показателя (при прочих равных) соответствует большее значение индикатора.

Ранее было предложено несколько подходов к построению интегральных индикаторов [6, 7, 8]. Подход «без учителя» заключается в нахождении интегральных индикаторов с помощью описаний объектов и выбранного метода их построения. Например, таковым является построение интегрального индикатора методом главных компонент, согласно которому интегральный индикатор является проекцией векторов описаний объектов на первую главную компоненту матрицы «объекты-признаки» [9, 10].

Подход «с учителем» использует кроме описаний объектов экспертные оценки качества объектов или оценки важности показателей и заключается в нахождении компромисса между этими оценками и вычисленными индикаторами. Ранее был предложен подход, в котором восстанавливается регрессия описаний объектов на экспертные оценки качества объектов [11].

Экспертные оценки могут быть выставлены в различных шкалах. То есть, сначала требуется установить тип шкал, по которым проводятся измерения. «Тип шкалы задает группу допустимых преобразований шкалы» [12]. Различают несколько типов

шкал. Номинальная (допустимыми являются все взаимно-однозначные преобразования), ранговая (монотонные преобразования) — основные типы шкал качественных признаков. Шкала интервалов, отношений, разностей, абсолютная шкала — основные типы шкал количественных признаков. Данная работа посвящена уточнению экспертных оценок, выставленных в ранговых и абсолютных шкалах.

В данной работе для построения интегральных индикаторов принимается линейная модель: строится линейная комбинация признаков с их весами. Вектор весов признаков и начальный интегральный индикатор выставляются экспертами в абсолютной или ранговой шкале. В общем случае, построенный по вектору весов интегральный индикатор не совпадает с индикатором, заданным экспертами, то есть экспертные данные противоречат друг другу. Данная работа посвящена устранению разногласия в данных экспертов.

Одним из примеров задачи устранения разногласия является задача голосования. Несколько экспертов выставляют оценки, и ищется окончательная оценка, учитывающая мнение каждого из экспертов. Для решения задач голосования применяется теория группового выбора, описанная в [13, 14, 15, 16, 12].

В данной работе будут рассмотрены два метода. Первый метод развивает идеи, описанные в [17, 18, 19]. Метод заключается в следующем: ранговые экспертные оценки весов показателей задают выпуклый многогранный конус. Матрица «объекты-признаки» задает линейное отображение этого конуса из пространства показателей в пространство интегральных индикаторов. Полученный в результате отображения конус может пересекаться с конусом, заданным ранговыми экспертными оценками интегрального индикатора. В этом случае, экспертные оценки показателей и объектов считаются непротиворечивыми, и отыскивается наиболее устойчивый интегральный индикатор. В противном случае, выполняется процедура рангового уточнения оценок.

Уточнение оценок выполняется с помощью минимизации расстояния между векторами, располагающихся в двух конусах одного пространства. Также оно выполняется с помощью максимизации ранговой корреляции Спирмена [20, 21]. Для нахождения наиболее коррелированных векторов предлагается использовать эвристический

алгоритм поиска [22]. В данной работе будет показано, что две предложенные процедуры дают сравнимые результаты.

Второй метод состоит в решении задачи монотонной интерполяции [23, 24, 25, 26, 27, 28]. Метод заключается в том, что отыскивается вектор с монотонной последовательностью координат, наиболее близкий к заданному экспертами. Введенный в модель гиперпараметр позволяет отдавать предпочтение экспертным оценкам индикаторов или оценкам весов признаков.

Предложенные алгоритмы используются для оценивания хорватских электростанций [29]. Данные представляют собой матрицу «объекты-признаки» (7 объектов, 11 признаков) и заданные экспертами векторы оценок. Оценивается производительность электростанции.

## 1.1 Определения и обозначения

Задана матрица описаний объектов  $X = \{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ . Вектор  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$  — описание  $i$ -го объекта.

Интегральный индикатор — линейная комбинация вида

$$y_i = \sum_{j=1}^n w_j g_j(x_{ij}),$$

где  $g_j$  — функция приведения показателей в единую шкалу, например:

$$g_j : x_{ij} \mapsto (-1)^{\zeta_j} \frac{x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}} + \zeta_j. \quad (1)$$

Параметр  $\zeta_j$  назначается равным 1, если оптимальное значение показателя минимально, и 0 иначе. Если знаменатель дроби 1 равен нулю для некоторых значений индекса  $j$ , то соответствующий признак исключается из дальнейшего рассмотрения. Будем обозначать теперь за  $X$  приведенную таким способом матрицу «объекты-признаки». Таким образом,

$$\mathbf{y} = X\mathbf{w}.$$

Заданы в ранговых шкалах экспертные оценки:  $\mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0$ , допускающие произвольные монотонные преобразования. Пусть на наборах экспертных оценок введено отношение порядка такое, что

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m \geq 0; w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0.$$

Множество всех таких векторов задается системой линейных неравенств

$$Jy \geq 0,$$

где

$$J_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же порядок  $y_{i_1} \geq y_{i_2} \geq \dots \geq y_{i_m} \geq 0$  произвольный, то матрица системы будет получаться из  $J$  перестановкой соответствующих столбцов.

Таким образом, заданным  $y_0$  и  $w_0$  можно поставить в соответствие матрицы  $J_m$  и  $J_n$  размеров соответственно  $m \times m$  и  $n \times n$ .

## 1.2 Постановка задачи с использованием конусов

Поставим задачу согласования экспертных оценок. Для этого, введем ряд определений.

**Определение 1.** Множество точек  $\mathcal{U}$  в  $\mathbb{R}^m$  называется конусом, если для любой точки  $y \in \mathcal{U}$  точка  $\lambda y$  также принадлежит  $\mathcal{U}$ .

**Определение 2.** Выпуклым многогранным конусом называется пересечение конечного числа полупространств, граничные плоскости которых проходят через общую точку. Эта точка называется вершиной конуса.

Непосредственно из этого следует

**Определение 3.** *Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решений системы однородных неравенств:*

$$\begin{cases} x_{11}w_1 + x_{12}w_2 + \dots + x_{1n}w_n \geq 0, \\ x_{21}w_1 + x_{22}w_2 + \dots + x_{2n}w_n \geq 0, \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ x_{m1}w_1 + x_{m2}w_2 + \dots + x_{mn}w_n \geq 0. \end{cases}$$

Эта система линейных неравенств задает в соответствующем пространстве выпуклый многогранный конус. Соответствуя данному определению, определим  $\mathcal{Y}$  — конус, задаваемый матрицей  $J_q$  в пространстве интегральных индикаторов;  $\mathcal{W}$  — конус, задаваемый матрицей  $J_w$  в пространстве весов признаков. Эти конусы характеризуются тем, что векторы внутри каждого из них имеют одинаковый ранговый порядок.

Поскольку  $X$  — линейное преобразование, оно переводит конус  $\mathcal{W}$  в конус  $X\mathcal{W}$ , который лежит в пространстве интегральных индикаторов. Отметим, что в этом конусе компоненты векторов уже могут иметь разный ранговый порядок.

**Задача 1.** *Требуется найти в конусах  $\mathcal{W}$  и  $\mathcal{Y}$  векторы  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{y}$ , такие, что:*

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1) = \arg \min_{\mathbf{y}, \mathbf{w}} \|\mathbf{y} - X\mathbf{w}\| : \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \|\mathbf{y}\| = 1, \|X\mathbf{w}\| = 1, \quad (2)$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова метрика в пространстве  $\mathbb{R}^m$ .

Таким образом, отыскивается вектор весов  $\mathbf{w}_1$ , элементы которого имеют такой же ранговый порядок, что и  $\mathbf{w}_0$ . При этом приведенный в ранговую шкалу индикатор  $X\mathbf{w}_1$  ближайший к  $\mathbf{y}_0$ .

Эту же задачу можно поставить и по-другому: нужно найти векторы в двух конусах, которые больше всего коррелированы друг с другом. Дадим ряд определений.

Пусть вектор  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Обозначим  $\mathbb{S}_i$  — множество, состоящее из компонент вектора  $\mathbf{a}$ , которые не больше компоненты  $a_i$ :

$$\mathbb{S}_i = \{j \in \{1, \dots, n\} : a_i \geq a_j\}$$

**Определение 4.** *Будем называть рангом наблюдения  $a_i$  в векторе  $\mathbf{a}$  величину  $a'_i$ :*

$$a'_i = |\mathbb{S}_i|$$



Таким образом, если, например,  $a_k$  - наименьшая компонента вектора  $\mathbf{a}$ , то  $a'_k = 1$ .

**Определение 5.** Пусть два вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Коэффициентом корреляции Спирмена между  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется величина

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^n (a'_i - b'_i)^2.$$

**Задача 2.** Найти векторы  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{y}$  в конусах  $\mathcal{W}$  и  $\mathcal{Y}$ , между которыми коэффициент корреляции Спирмена принимает наибольшее значение:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_1) = \arg \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \rho(\mathbf{y}, X\mathbf{w}) : \|\mathbf{y}\| = 1, \|\mathbf{X}\mathbf{w}\| = 1.$$

Можно показать, что задачи **1** и **2** дают сравнимые результаты. Пусть  $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in B \subset \mathbb{R}^n$ , а также:

$$\mathbb{S} = \{1, \dots, n\};$$

$$\forall i = \overline{1, n} \ a_i \in \mathbb{S}, \ b_i \in \mathbb{S};$$

$$\forall i, j \ a_i \neq a_j, \ b_i \neq b_j.$$

Тогда корреляция Спирмена:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^n (a'_i - b'_i)^2 = 1 - \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = \\ &= 1 - c \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в этом случае задача максимизации корреляции эквивалентна задаче минимизации расстояния. Однако отличие от задачи **1** состоит в том, что в задаче **1** минимум ищется не по «ранговым» векторам (координаты которых принадлежат множеству  $\mathbb{S}$ ), а по произвольным единичным.

### 1.3 Свойства многогранных конусов

Для обоснования предложенного ниже алгоритма приведем некоторые свойства многогранных конусов. Согласно определению 3, система неравенств  $J\mathbf{w} \geq 0$  задает многогранный конус. Отсюда следует

**Утверждение 1.** Пересечение многогранных конусов с вершиной в начале координат является многогранным конусом.

*Доказательство.* Рассмотрим два многогранных конуса. Выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат — это область решения некоторой системы однородных неравенств. Пусть первому конусу соответствует система неравенств  $X_1 \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ , а второму —  $X_2 \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ . Пересечение двух конусов — область решений системы, составленной из неравенств обеих систем, соответствующих конусам. Другими словами, пересечение двух данных конусов задается системой однородных неравенств с матрицей

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

□

**Утверждение 2.** Множество  $\mathcal{W}$  всех векторов  $\mathbf{w} = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ , удовлетворяющих условиям  $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0$ , является конусом.

*Доказательство.* Действительно, если вектор  $w$  принадлежит множеству  $\mathcal{W}$ , то для любого  $\lambda \geq 0$  справедливо неравенство  $\lambda w_1 \geq \lambda w_2 \geq \dots \geq \lambda w_n \geq 0$ , поэтому вектор  $\lambda \mathbf{w}$  также принадлежит множеству векторов  $\mathcal{W}$ . □

**Утверждение 3.** Геометрическое место точек, в которое отображение  $X : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$  переводит конус, является конусом.

*Доказательство.* Для любого вектора  $\mathbf{w}$ , принадлежащего конусу  $\mathcal{W}$ , вектор  $\lambda \mathbf{w}$  также ему принадлежит, а  $\mathbf{y} = X \mathbf{w}$ . Поэтому, если вектор  $\mathbf{y}$  принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек, то и вектор  $\lambda \mathbf{y} = \lambda X \mathbf{w} = X(\lambda \mathbf{w})$  ему принадлежит. □

Таким образом, если  $\mathcal{W}$  — многогранный конус, то отображение  $X$  переводит его в многогранный конус  $\mathcal{Y} = X \mathcal{W}$ . Соответствующее псевдообратное отображение  $X^+$  переводит конус  $\mathcal{Y}$  в конус  $X^+ \mathcal{Y} = \mathcal{W}$ .

**Утверждение 4.** Если конусы, задаваемые в пространстве интегральных индикаторов системами линейных неравенств  $B_1 \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  и  $B_2 \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ , пересекаются, то их отображения в пространстве весов показателей тоже пересекаются.

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $X \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Так как по условию теоремы конусы пересекаются, то найдется вектор  $\mathbf{y}$ , такой что  $(B_1 X) \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  и  $(B_2 X) \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ , то есть конусы в пространстве  $\mathcal{W}$  тоже пересекаются. □

В контексте рассматриваемой задачи, если в пространстве интегральных индикаторов многогранные конусы, задаваемые неравенствами  $J_m \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  и  $X J_n \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ , пересекаются, то их псевдообратные отображения в пространство весов показателей  $X^+ J_m \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$  и  $J_n \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ , тоже пересекаются. Обозначим пересечения конусов в соответствующих пространствах как  $\mathcal{W}_p = \mathcal{W} \cap X^+ \mathcal{Y}$  и  $\mathcal{Y}_p = \mathcal{Y} \cap X \mathcal{W}$ .

**Утверждение 5.** *Если конус  $\mathcal{Y}_p$  не пуст, то не пуст также и конус  $\mathcal{W}_p$ . В противном случае оба конуса пусты.*

*Доказательство.* Действительно, пусть конус  $\mathcal{Q}_p$  не пуст, значит, существует вектор  $\mathbf{q}_p$  такой, что принадлежит конусам  $\mathcal{Y}$  и  $X \mathcal{W}$  одновременно. Покажем что конус  $\mathcal{W}_p$  не пуст. Рассмотрим векторы  $\mathbf{y}_p = X \mathbf{w}_p \in \mathcal{Y}_p$  и  $\mathbf{w}_p = X^+ \mathbf{y}_p \in \mathcal{W}_p$ . Линейное отображение  $X^+$  переводит конус  $\mathcal{Q}$  в конус  $X^+ \mathcal{Q}$ . Векторы  $\mathbf{y} \in X \mathcal{W}$ , вектор  $\mathbf{w}_p \in \mathcal{W}$  (линейное отображение  $X : \mathcal{W} \rightarrow X \mathcal{W}$ ). Таким образом, вектор  $\mathbf{w}_p$  принадлежит конусу  $\mathcal{W}_p$  — пересечению конусов  $\mathcal{W}$  и  $X^+ \mathcal{Y}$ .

Пусть теперь конус  $\mathcal{Y}_p$  пуст. Покажем от противного, что конус  $\mathcal{W}_p$  также пуст. Если это не так, то существует вектор  $\mathbf{w}_p$ , одновременно принадлежащий конусам  $\mathcal{W}$  и  $X^+ \mathcal{Y}$ . Рассмотрим вектор  $\mathbf{y}_p = X \mathbf{w}_p$ . Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что вектор  $\mathbf{y}_p$  принадлежит конусам  $\mathcal{Y}$  и  $X \mathcal{W}$ , то есть конусу  $\mathcal{Y}_p$ . То есть, конус  $\mathcal{Y}_p$  не пуст. Полученное противоречие показывает, что конус  $\mathcal{W}_p$  пуст.  $\square$

Доказанное утверждение эквивалентно следующему: для каждого вектора  $\mathbf{w}_p$ , принадлежащего конусу  $\mathcal{W}_p$ , найдется согласованный с ним вектор  $\mathbf{y}_p \in \mathcal{Y}_p$ , такой, что выполняются условия

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p &= X \mathbf{w}_p, \\ \mathbf{w}_p &= X^+ \mathbf{y}_p. \end{aligned} \tag{3}$$

Для отыскания пересечения конусов  $\mathcal{Y}_p$  опишем соответствующие множества системами линейных неравенств. Представим конус  $\mathcal{Y}_p$ , элементы которого удовлетворяют условию

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m \geq 0 \text{ и } w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0. \tag{4}$$

в виде двухдиагональной матрицы  $\mathcal{Y}_0$ , в которой элементы на главной диагонали равны 1, а элементы на диагонали  $(1, 2), \dots, (n-1, n)$  равны -1. Представим отображение  $(X \mathcal{W})$  также в виде матрицы коэффициентов в пространстве  $R^{m \times m}$ . Множество

векторов  $\mathcal{Y}_p \ni \mathbf{y}_p$  является решением объединенной системы линейных неравенств

$$\begin{cases} J_y \mathbf{y} & \geq 0, \\ (XJ_w) \mathbf{w} & \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Полученное пересечение  $\mathcal{Y}_p$  также является конусом (возможно, тривиальным), каждый элемент которого является интегральным индикатором, удовлетворяющим условию согласованности (3).

## 1.4 Решение задачи минимизации расстояния между векторами в конусах

В случае непустого пересечения конусов  $\mathcal{Y}$  и  $X\mathcal{W}$  решение задачи (2) дает вектор  $\mathbf{y}$ , который лежит в пересечении этих конусов. Если пересечение - пустое, предлагается найти ближайшие друг к другу лучи на ребрах или гранях конусов:

$$\|\mathbf{y} - X\mathbf{w}\| \rightarrow \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}, \mathbf{y} \in \mathcal{Y}}.$$

Отыскиваемая пара должна выполнять следующие условия:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \|\mathbf{y} - X\mathbf{w}\| \\ & \text{subject to} && \mathbf{y}^T \mathbf{y} = 1, \quad (X\mathbf{w})^T X\mathbf{w} = 1, \\ & && J_n \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad J_m \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Построим итерационный алгоритм, последовательно находящий приближения векторов  $\mathbf{y}^{(2k)}$ ,  $\mathbf{w}^{(2k+1)}$  на четном и нечетном шаге. Векторы  $\mathbf{a} = \mathbf{y}^{(2k)}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{w}^{(2k+1)}$  будем считать решениями двух последовательно решаемых оптимизационных задач, полагая вектор  $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}_0$  на шаге  $k = 0$ .

### Алгоритм 1.

Задача $2k$ :		Задача $2k + 1$ :	
<i>minimize</i>	$\ \mathbf{a} - X\mathbf{w}^{(2k)}\ $	<i>minimize</i>	$\ \mathbf{y}^{(2k+1)} - X\mathbf{b}\ $
<i>subject to</i>	$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1,$ $J_n \mathbf{a} \geq \mathbf{0}.$	<i>subject to</i>	$\mathbf{b}^T X^T X \mathbf{b} = 1,$ $J_m \mathbf{b} \geq \mathbf{0}.$

При решении задач, на каждом шаге значения констант  $\mathbf{w}^{(2k)}$  и  $\mathbf{y}^{(2k+1)}$  принимаются равными значениям соответствующих решений  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  предыдущего шага. Так как максимизируемые функции и ограничения обеих задач являются выпуклыми, то решение будет найдено за конечное число шагов. Методы выпуклой оптимизации, используемые для получения численных решений, хорошо исследованы и описаны, например, в [30, 31]

## 1.5 Решение задачи максимизации корреляции между векторами в конусах

Будем решать эту задачу аналогично алгоритму 1.

### Алгоритм 2.

Задача $2k$ :		Задача $2k + 1$ :	
<i>maximize</i>	$\rho(\mathbf{a} - X\mathbf{w}^{(2k)})$	<i>maximize</i>	$\rho(\mathbf{y}^{(2k+1)} - X\mathbf{b})$
<i>subject to</i>	$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1,$	<i>subject to</i>	$\mathbf{b}^T X^T X \mathbf{b} = 1,$
	$J_n \mathbf{a} \geq 0.$		$J_m \mathbf{b} \geq 0.$

Поскольку в условии задачи 2 фигурируют ранги, нельзя решать эту задачу стандартными методами выпуклой оптимизации. Предлагается использовать следующий эвристический алгоритм (рассмотрим итерацию алгоритма 2, где отыскивается вектор весов при фиксированном векторе  $\mathbf{y}$ ):

### Решение задачи 2

1. Номер шага  $k = 1$ . Случайным образом генерируется набор пробных решений:

$$W^k = \{\mathbf{w}_1^k, \dots, \mathbf{w}_s^k\},$$

где  $s$  — параметр, равный количеству пробных решений.

2. Для всех  $i = 1, \dots, s$  вычисляются значения

$$\rho_i^k = \rho(\mathbf{y}_0, X\mathbf{w}_i^k),$$

и далее по всем  $i$  находится максимум  $\rho_{max}^k = \max_i \rho_i^k$ . Если при  $k > 1$

$$|\rho_{max}^k - \rho_{max}^{k-1}| > \eta,$$

где  $\eta$  - параметр, то алгоритм останавливается и выдает в качестве ответа  $\mathbf{w}_i^k$ , на котором достигается  $\rho_{max}^k$ . Иначе — переход на шаг 3.

3. Из всех  $\mathbf{w}_i^k$  по всем  $i$  выбираются векторы, для которых значение  $\rho_i^k$  — наибольшее. Для каждой пары этих векторов

$$\mathbf{w}_i^k = (a_1, \dots, a_m), \mathbf{w}_j^k = (b_1, \dots, b_m),$$

порождаем новые векторы следующим образом: выбираем случайное число  $t \in \{1, \dots, m\}$ , и получаем векторы

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = (a_1, \dots, a_t, b_{t+1}, \dots, b_m), \mathbf{w}_j^{k+1} = (b_1, \dots, b_t, a_{t+1}, \dots, a_m).$$

4. Для этих же  $\mathbf{w}_i^k$  меняем случайным образом одну компоненту с вероятностью  $\sigma$  (заданной наперед):

$$\mathbf{w}_{i'}^{k+1} = (a_1, \dots, a_{t-1}, \beta, a_{t+1}, \dots, a_m).$$

5. Изменяем значение шага:  $k = k + 1$
6. Возвращение на шаг 2.

## 1.6 Постановка задачи с использованием монотонной интерполяции

Далее, будет предложен новый алгоритм согласования экспертных оценок. Его преимущество над рассмотренными ранее заключается, главным образом, в оценке времени работы.

Пусть  $\mathbf{y}_0$  — заданное экспертами начальное приближение вектора  $\mathbf{y}$ . Согласно (3), можно найти вектор  $\tilde{\mathbf{w}} = X^+ \mathbf{y}_0$ .

**Задача 3.** *Требуется найти такую монотонную последовательность  $w_1 \leq \dots \leq w_n$ , что она лучше всего приближает вектор  $\tilde{\mathbf{w}}$  в смысле среднего квадрата ошибки:*

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{w \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_i - w_i)^2, \\ w_n \geq \dots \geq w_1. \end{cases}$$

Такую задачу можно решить, например, методом, описанным в [24]. Однако, чтобы добиться согласования экспертных оценок, введем в модель гиперпараметр. С его

помощью мы сможем варьировать нашу «степень доверия» от экспертных оценок весов признаков (то есть, монотонной последовательности  $w_n \geq \dots \geq w_1$ ) к экспертным оценкам интегральных индикаторов (вектору  $\widehat{\mathbf{w}}$ ).

**Задача 4.** Требуется найти такой вектор  $\widehat{\mathbf{w}}$ , что:

$$\widehat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\tilde{w}_i - w_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})_+ \right).$$

## 1.7 Решение задачи монотонной интерполяции с гиперпараметром

Для решения этой задачи воспользуемся идеями, описанными в [23, 27].

**Утверждение 6.** Пусть, для некоторого  $\lambda_0$ , совпадают две соседние координаты вектора  $\widehat{w}$ :  $\widehat{w}_j(\lambda_0) = \widehat{w}_{j+1}(\lambda_0)$ . Тогда  $\widehat{w}_j(\lambda) = \widehat{w}_{j+1}(\lambda)$  для всех  $\lambda > \lambda_0$ .

Схему доказательства этого утверждения можно прочитать в [27].

Пусть при некотором  $\lambda$  совпадают некоторые соседние координаты вектора  $\mathbf{w}$ , и всего таких множеств совпадающих координат —  $K_\lambda$ . Обозначим за  $A_1, \dots, A_{K_\lambda}$  сами эти множества. Заметим, что  $A_1 \cup \dots \cup A_{K_\lambda} = \{1, \dots, n\}$ . Тогда функция потерь для задачи 4 переписется в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_\lambda} \sum_{l \in A_k} (\tilde{w}_l - w_{A_k})^2 + \lambda \sum_{k=1}^{K_\lambda} (w_{A_k} - w_{A_{k+1}})_+.$$

Продифференцируем ее по всем  $w_{A_k}$ :

$$- \sum_{l \in A_k} \tilde{w}_l + |A_k| \widehat{w}_{A_k}(\lambda) + \lambda (s_k - s_{k-1}) = 0$$

для  $k = 1, \dots, K_\lambda$ ,

где  $s_k = 1$  при  $\widehat{w}_{A_k}(\lambda) - \widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) > 0$ , и  $s_k = 0$  иначе.

Пусть все  $A_1, \dots, A_{K_\lambda}$  не изменяются с увеличением  $\lambda$ . Тогда:

$$\frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{s_{k-1} - s_k}{|A_k|}.$$

Когда  $\lambda$  увеличивается, множества  $A_k$  меняются. Однако, согласно утв. 6, они могут только объединяться, то есть, величины компонент  $\widehat{w}_{A_k}(\lambda)$  внутри каждого множества  $A_k$  остаются равными. Можно посчитать величину следующего  $\lambda$ , при котором будут объединяться множества  $A_k, A_{k+1}$ . Обозначим это  $\lambda$  как  $t_{k,k+1}$ .

**Утверждение 7.** *Множества  $A_k$  и  $A_{k+1}$  будут объединяться при*

$$t_{k,k+1} = \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda,$$

для всех  $k = 1, \dots, K_\lambda - 1$ , где

$$D_k = \frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}.$$

*Доказательство.* Поскольку производные

$$\frac{d\widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{d\lambda}$$

не являются функциями  $\lambda$ , можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \widehat{w}_{A_k}(\lambda) = \lambda D_k + C_k, \\ \widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) = \lambda D_{k+1} + C_{k+1}. \end{cases}$$

В точке  $t_{k,k+1}$  происходит объединение множеств  $A_k$  и  $A_{k+1}$ , то есть:

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{A_k}(t_{k,k+1}) = \widehat{w}_{A_{k+1}}(t_{k,k+1}) &\Rightarrow t_{k,k+1} = \frac{C_{k+1} - C_k}{D_k - D_{k+1}} = \\ &= \frac{(\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \lambda D_{k+1}) - (\widehat{w}_{A_k}(\lambda) - \lambda D_k)}{D_k - D_{k+1}} = \\ &= \frac{\widehat{w}_{A_{k+1}}(\lambda) - \widehat{w}_{A_k}(\lambda)}{D_k - D_{k+1}} + \lambda. \end{aligned}$$

□

Таким образом, на каждой итерации нужно вычислять величину

$$\widehat{\lambda} = \min_{k:t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}$$

и объединять множества  $A_{k'}$  и  $A_{k'+1}$ , где

$$k' = \arg \min_{k:t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}. \quad (3)$$



## 1.8 Алгоритм решения задачи монотонной интерполяции

1. присвоить  $\lambda = 0$ ,  $K_\lambda = n$ ,  $A_k = \{k\}$  для всех  $k = 1, \dots, n$ , а также  $\hat{w}_{A_k}(\lambda) = \tilde{w}_k$ .
2. Повторять (3-6):
3. Посчитать величины  $D_k$
4. Посчитать  $t_{k,k+1}$  для каждой пары соседних множеств
5. Если все  $t_{k,k+1} \leq \lambda$ , выход
6. Посчитать  $\hat{\lambda}$  и присвоить

$$\hat{w}_{\hat{\lambda}, A_k} = \hat{w}_{\lambda, A_k} + D_k(\hat{\lambda} - \lambda)$$

для всех  $k = 1, \dots, K_\lambda$ . Объединить  $A_{k'}$  и  $A_{k'+1}$ , положить  $\lambda = \hat{\lambda}$ .

## 1.9 Результат работы алгоритма монотонной интерполяции

Проверяется работа алгоритма решения задачи монотонной интерполяции. Генерируется выборка: функция  $y_i = x_i + \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 20)$ . Синяя линия — восстановленная зависимость, для различных значений регуляризатора  $\lambda$ .

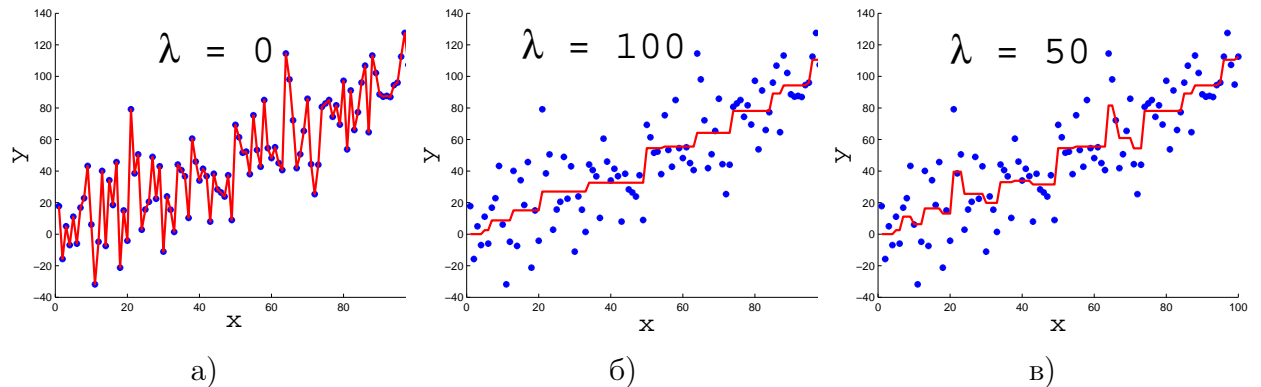


Рис. 1: а)  $\lambda = 0$ , б)  $\lambda = 110$ , в)  $\lambda = 50$

Видно, что при  $\lambda = 100$  (и более) функция, восстанавливающая зависимость, — монотонная. При  $\lambda = 0$ , наоборот, никакой монотонной коррекции нет.

## 2 Вычислительный эксперимент

### 2.1 Исходные данные

В данной работе был проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок качества хорватских электростанций. Для этого были собраны следующие данные: матрица «объекты-признаки», где объекты — это 7 электростанций, описываемых 11-ю признаками, экспертные оценки весов показателей и интегральных индикаторов заповедников. Приведем таблицу с данными (в ней показано только 6 первых признаков):

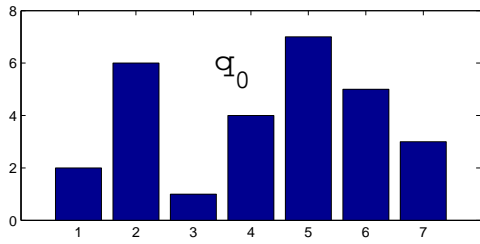
N	Power Plant	Available net capacity (MW)	Electricity (GWh)	Heat (TJ)	SO <sub>2</sub> (t)	NO <sub>x</sub> (t)	Particles (t)
1	Plomin 1 TPP	98	452	0	1950	1378	140
2	Plomin 2 TPP	192	1576	0	581	1434	60
3	Rijeka TPP	303	825	0	6392	1240	171
4	Sisak TPP	396	741	0	3592	1049	255
5	TE-TO Zagreb CHP	337	1374	481	2829	705	25
6	EL-TO Zagreb CHP	90	333	332	1259	900	19
7	TE-TO Osijek CHP	42	114	115	1062	320	35
	Optimal value	max	max	max	min	min	min

Таблица 1: электростанции

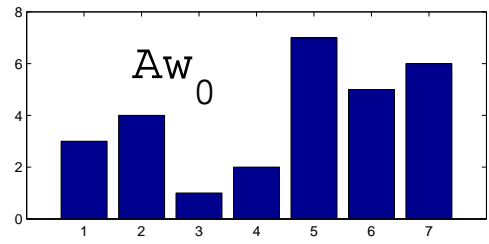
### 2.2 Результаты эксперимента

Приведем графики интегральных индикаторов, вычисленных различными алгоритмами.

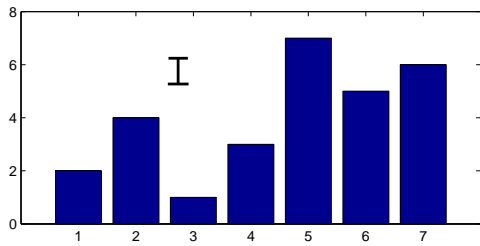
На рис. 2 изображены: а) Начальный интегральный индикатор  $q_0$ . б) Интегральный индикатор, построенный по  $w_0$ . в) Интегральный индикатор, построенный алгоритмом минимизации расстояния между векторами в конусах. г) Интегральный индикатор, построенный алгоритмом максимизации корреляции между векторами в конусах. д) Интегральный индикатор, построенный алгоритмом монотонной интерполяции со значением гиперпараметра  $\lambda = 1$ . е) Интегральный индикатор, построенный алгоритмом монотонной интерполяции со значением гиперпараметра  $\lambda = 0.5$ .



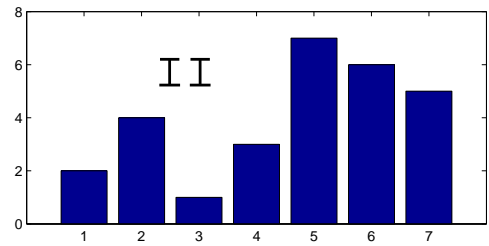
а)



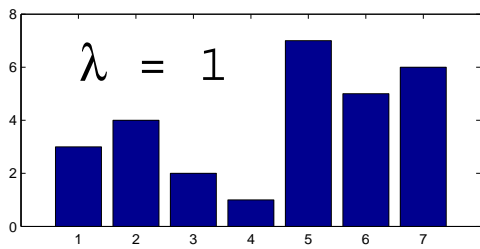
б)



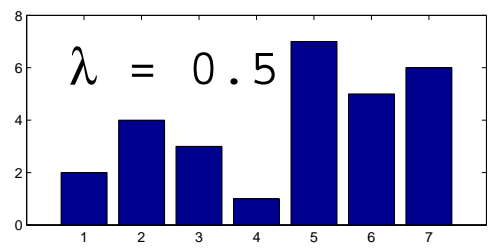
в)



г)



д)



е)

Рис. 2: Интегральные индикаторы электростанций

### 3 Заключение

В работе рассматривалась задача получения согласованных оценок качества объектов и важности показателей. В результате выполнения работы:

1. Обобщены ранее полученные результаты по согласованию экспертных оценок с использованием конусов;
2. Предложено использовать алгоритм монотонной интерполяции для уточнения экспертных оценок;
3. Исследованы свойства этого алгоритма при различном значении гиперпараметра, введенного в модель;
4. Разработана программная система уточнения экспертных оценок;
5. Для практической проверки разработанных алгоритмов и всей программной системы был проведен вычислительный эксперимент уточнения экспертных оценок качества хорватских электростанций, составлен рейтинг электростанций, основанный на оценках экспертов и измеряемых данных.

### Список литературы

- [1] М. Г. Гафт. *Принятие решений при многих критериях*. Знание, 1979.
- [2] О. И. Ларичев. *Наука и искусство принятия решений*. Наука, 1979.
- [3] М. Г. Гафт, В. В. Подиновский. О построении решающих правил в задачах принятия решений. *Автоматика и телемеханика*, pages 128–138, 1981.
- [4] С. В. Емельянов, О. И. Ларичев. *Многокритериальные методы принятия решений*. Знание, 1985.
- [5] Л. И. Лопатников. *Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки*. 2003.
- [6] D. W. Marquardt. Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation. *Technometrics*, page 605–607, 1996.
- [7] О. И. Ларичев, Е. М. Мошкович. *Качественные методы принятия решений*. Физматлит, 1996.

- [8] В. В. Подиновский. Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями. *Автоматика и телемеханика*, page 118–127, 1976.
- [9] A. J. Isenmann. *Modern multivariate statistical techniques*. Springer, 2008.
- [10] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer, 2002.
- [11] В. В. Стрижов. Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.*, page 59–64, 2006.
- [12] А. И. Орлов. *Эконометрика*. «Экзамен», 2002.
- [13] V. I. Danilov, A. I Sotskov. *Social Choice Mechanisms*. Springer-Verlang, 2002.
- [14] Saari Donald G. Mathematics and voting. *Notices of the American Mathematical Society*, 4/2008.
- [15] Б. Г. Литвак. *Экспертная информация: методы получения и анализа*. Радио и связь, 1982.
- [16] А. И. Орлов. *Экспертные оценки. Учебное пособие*. 2002.
- [17] V. V. Strijov. The specification on expert estimations using measured data. *Zavodskaya Laboratoriya*, 2006.
- [18] Т. В. Казакова, В. В. Стрижов. Устойчивые интегральные индикаторы с выбором опорного множества описаний. *Заводская лаборатория*, 2007.
- [19] Vadim Strijov, Goran Granic et al. Integral indicator of ecological impact of the croatian thermal power plants. *Energy doi:10.1016/j.energy.2011.04.30*, 2011.
- [20] J. L. Myers, A. D. Well. *Research Design and Statistical Analysis*. Lawrence Erlbaum, 2003.
- [21] Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. *Введение в математическую статистику*. ЛКИ, 2009.
- [22] Zbigniew Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer, 1992.

- [23] H. Hoefling. A path algorithm for the fused lasso signal approximator. *Unpublished*, 2010.
- [24] Jan de Leeuw, Kurt Hornik, Patrick Mair. Isotone optimization in r: Pool-adjacent-violators algorithm (pava) and active set methods. *Journal of Statistic Software*, 32, 2009.
- [25] R. E. Barlow, H. D. Brunk. The isotonic regression problem and its dual. *Journal of American Statistical Association*, 67:140–147, 1972.
- [26] Richard L. Dykstra, Tim Robertson. An algorithm for isotonic regression for two or more independent variables. *The Annals Of Statistics*, 10:708–716, 1982.
- [27] Ryan J. Tibshirani, Holger Hoefling, Robert Tibshirani. Nearly-isotonic regression. *Technometrics*, 53, 2011.
- [28] Mary C. Meyer. Inference for multiplied isotonic regression. 2010.
- [29] R. Kos, Z. Krisic, T. Tarnik. Hrvatska elektoprivreda and the environment 2005-2006. *Zagreb, Hrvatska Elektroprivreda*, 2008.
- [30] S. Boyd, L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2006.
- [31] J. Nocedal, S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, 1999.
- [32] Ryan J. Tibshirani, Jonathan Taylor. The solution path of the generalized lasso. *Annals of Statistics*, 39:1335–1371, 2011.
- [33] Д. В. Беклемишев. *Доп. главы линейной алгебры*. Москва, 2010.