МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Лазарев А. А.

www.orsot.ru
jobmath@mail.ru

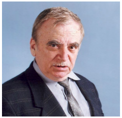
Москва, 2021

Генри Лоренс Гантт, 1861-1919

Селмер Мартин Джонсон, 1916-1996

Ричард Эрнест Беллман, 1920-1984

Джеймс Ричард Джексонн, 1924-2011



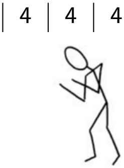
Шкурба Виктор Васильевич, 1935 – 2011

Танаев Вячеслав Сергеевич, 1940 - 2002

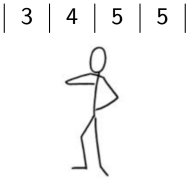
Питер Брукер, 1942-2013

Ян Карел Ленстра, 1947 - ...

Стратегия студента на экзамене



а) получил все четвёрки, чтобы не потерять стипендию



б) получил одну тройку среди остальных четвёрок и пятёрок

Рис.: Студенты и их оценки в семестре

Задана матрица $n \times n$: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Полиномиально разрешимые случаи

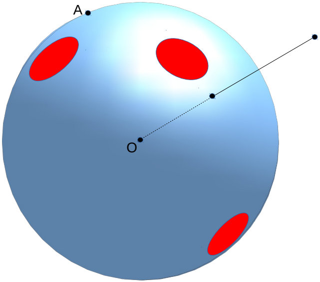
Примеры Джексона: $X \cdot r^T = 0$.
Примеры Лазарева: $X \cdot (d^T - r^T - p^T) \geq 0$, $X \cdot d^T \leq 0$.
Примеры Хогевена: $X \cdot (d^T - p^T) \leq E \cdot r^T + \beta \leq Ed^T$.
Случай слабо различающихся r: $(-X) \cdot r^T \leq p^T, X \cdot r^T < 0$
Случай сильно различающихся r: $(-X) \cdot r^T \geq p^T, X \cdot r^T < 0$

Определение

Если пример A разрешим (псевдо-)полиномиально, то точка, координатами которой являются параметры r, p, d , называется Р-точкой.

NP-трудная в сильном смысле задача $1 \mid r_j \mid L_{\max} : r_j, p_j, d_j, \quad j = 1, \ldots, n$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ — максимальное расстояние до разрешимых областей



$3n$-мерное пространство

- Утверждение 1. Для точек на луче множество оптимальных расписаний совпадает.
- Утверждение 2. Для каждой NP-трудной задачи существует количественное измерение сложности. утверждение
- Гипотеза. Существует некоторая предельная величина сложности для каждой NP-трудной задачи.

Определение

Метрикой для A и B называется функция, удовлетворяющая свойствам:

$$\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B \tag{1}$$

$$\rho(A,B) = \rho(B,A) \tag{2}$$

$$\rho(A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C) \tag{3}$$

для всех A, B, C.

Для двух произвольных примеров A и B задачи$\{P,Q,R\} \mid prec, r_j \mid L_{\max}$ мы определим следующие функции

$$\begin{cases} \rho_d(A,B) = \max\limits_{j\in N}\{d_j^A - d_j^B\} - \min\limits_{j\in N}\{d_j^A - d_j^B\}; \\ \rho_r(A,B) = \max\limits_{j\in N}\{r_j^A - r_j^B\} - \min\limits_{j\in N}\{r_j^A - r_j^B\}; \\ \rho_p(A,B) = \sum\limits_{j\in N}\left(\max\limits_{i\in M}(p_{ij}^A - p_{ij}^B)_+ + \max\limits_{i\in M}(p_{ij}^A - p_{ij}^B)_-\right); \\ \rho(A,B) = \rho_d(A,B) + \rho_r(A,B) + \rho_p(A,B), \end{cases} \tag{4}$$

(1-4) является метрикой $\rho(A,B)$ задачи теории расписаний

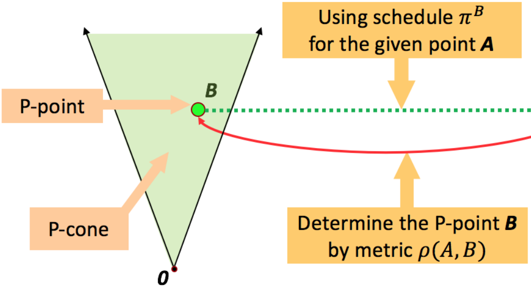
Дано: 1 прибор, множество работ $J = \{1, \ldots, n\}$, граф отношений предшествования G, моменты поступления r_j, продолжительности обслуживания требований p_j, директивные сроки d_j, $j \in J$. Целевая функция L_{max}.

Теорема

Для двух произвольных примеров A и B оптимальное расписание π^B является приближенным решением примера A с оценкой:

$$0 \leq L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \leq \rho(A, B). \tag{5}$$

Метрики получены для задач с несколькими приборами и для задач с суммарными критериями $\sum T_j, \sum C_j$ и др.



- Для исходного примера $A = \{G, (r_j^A, p_j^A, d_j^A)\}$ решается задача ЛП, в результате которой получется пример B в P-cone с параметами $\{(r_j^B, p_j^B, d_j^B)\}$ по метрике ρ.
- Формируется оптимальное расписание π^B для примера B. Согласно теореме 1, расписание π^B применятеся к исходному примеру A. В результате получается приближенное решение примера A с минимальной абсолютной погрешностью:

$$0 \leq L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \leq \rho(A, B).$$

Задача $1|r_j|L_{max}$. Пример из n требований. Вектор в **3n-мерном пространстве** записываем в виде:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha r_1 & \alpha r_2 & \dots & \alpha r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Аналогично задаём преобразования: $r'_j = \alpha r_j$, $p'_j = \beta p_j$, $d'_j = \gamma d_j$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$

Теорема

Полученные в результате преобразований $r'_j = \alpha r_j$, $p'_j = \beta p_j$, $d'_j = \gamma d_j$ производные примеры лежат на одной прямой, содержащей исходный пример.

- Исходный пример
- Узлы интерполяции (Лагранж)
- Узлы интерполяции (Чебышев)

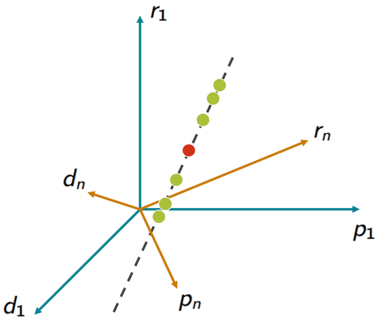


Рис.: Пространство примеров размерности n.

Дано: 1 прибор, множество работ $J = \{1, \dots, n\}$, отношения предшествования отсутствуют, моменты поступления $r_j = 0$, продолжительность обслуживания работ p_j, $j \in J$, оптимальные расписания π_k^*, $k \in \overline{1, N}$. Целевая функция $\sum\limits_j w_j C_j$

Определим следующее расписание ..., π_{-2}, π_{-1}, π_0, π_1

Алгоритм аппроксимации весовых коэффициентов целевой функции основан на решении эффективной системы неравенств:

$$i, j \in (1, ..., n), i \neq j$$

$$K = (k), k = \overline{1, N}$$

$$K_{i,j} = (k \in K : \pi_k^* = (...i, ..., j...))$$

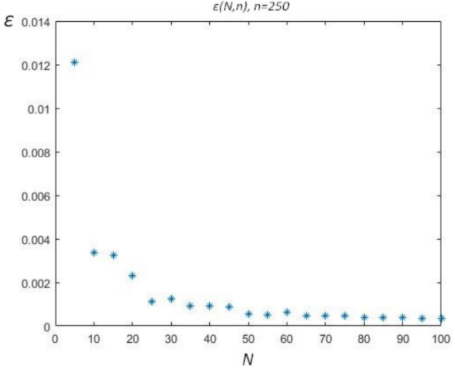
$$K_{j,i} = (k \in K : \pi_k^* = (...j, ..., i...))$$

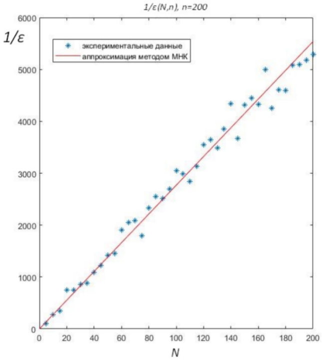
$$X(i,j) = \max_{k \in K_{j,i}} \left(\frac{p_j^k}{p_i^k}\right)$$

$$Y(i,j) = \max_{k \in K_{i,j}} \left(\frac{p_j^k}{p_i^k}\right)$$

$$X(i,j) \leq \frac{w_j}{w_i} \leq Y(i,j)$$

Начиная с 10-ти расписаний при 250-ти работах, уже можно оценить точность целевой функции до 3 знака после запятой.





Скажи мне своё расписание, и я скажу, кто ты (твоя целевая функция).

Дано: 1 прибор, множество работ $N = \{1, \dots, n\}$, моменты поступления r_j, продолжительности выполнения p_j, директивные сроки d_j.
Прерывания и одновременное обслуживание нескольких работ запрещены.
Допустимое расписание $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, $\Pi(N)$ — множество всех допустимых расписаний.
$C_j = C_j(\pi)$ — момент завершения работы $j \in N$,
$\varphi_j(C_j)$ — произвольная неубывающая функция.
Задача NP–трудна в сильном смысле.

$$\mu^* = \min_{\pi \in \Pi(N)} \max_{k=1,\dots,n} \varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi))$$

Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$\nu^* = \max_{k=1,\dots,n} \min_{\pi \in \Pi(N)} \varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi))$$

$$\nu_k = \min_{\pi \in \Pi(N)} \varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi)),\ k = 1, 2, \dots, n$$

$$\nu^* = \max_{k=1,\dots,n} \nu_k$$

Лемма

Пусть $\varphi_j(t), j = 1, 2, \dots, n,$ – произвольные неубывающие функции штрафа задачи $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$. Тогда $\nu_n \geq \nu_k,\ k = 1, 2, \dots, n$, то есть $\nu^* = \nu_n$.

Теорема

Пусть $\varphi_j(t), j = 1, 2, \dots, n,$ – произвольные неубывающие функции штрафа задачи $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$. Тогда $\mu^* \geq \nu^*$.

Задача	Сложность исходной	Сложность двойственной
$1\|r_j\|L_{\max}$	NP-трудная в сильном смысле	$O(n^2)$
$1\|r_j, prec\|L_{\max}$	NP-трудная в сильном смысле	NP-трудная в обычном смысле
$P\|r_j, prec\|L_{\max}$	NP-трудная в сильном смысле	NP-трудная в обычном смысле

1. Образование
2. Космос
3. Медицина
4. Связь
5. Транспорт
6. ...

- Большая размерность: горизонт планирования 2-3 года.
- У каждого из космонавтов индивидуальный план обучения, в зависимости от уровня его подготовки и роли в экспедиции.
- Каждую неделю новое расписание, отсутствует цикличность.

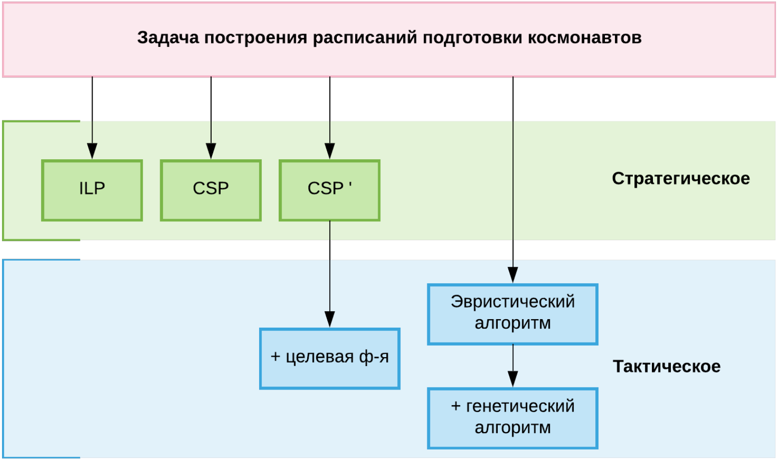
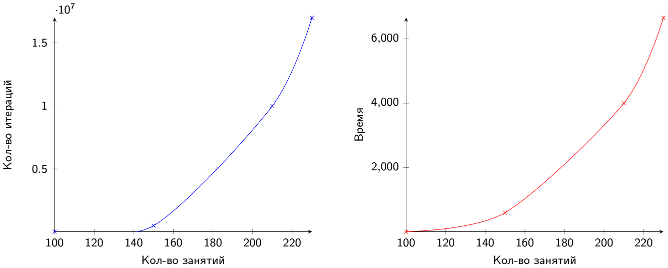
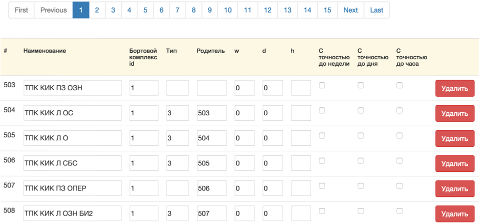
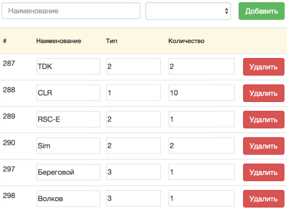


Таблица: Результаты решения задачи ILP на реальных данных при помощи IBM ILOG CPLEX v.12.6, Core i7, 16 Gb RAM

	3 нед. 100 зан.	5 нед. 150 зан.	8 нед. 230 зан.	60 нед. 2200 зан.
Время	9 сек	10 мин	2 часа	-
Итераций	20 тыс.	5 млн	17 млн	-

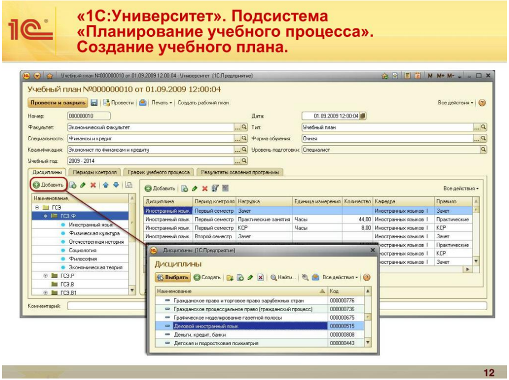



First Previous 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 Next Last
Наименование Бортовой комплекс id Тип Родитель w d h С точностью до недели С точностью до дня С точностью до часа
503 ТПК КИК ПЗ ОЗН 1 0 0 Удалить
504 ТПК КИК Л ОС 1 3 503 0 0 Удалить
505 ТПК КИК Л О 1 3 504 0 0 Удалить
506 ТПК КИК Л СБС 1 3 505 0 0 Удалить
507 ТПК КИК ПЗ ОПЕР 1 506 0 0 Удалить
508 ТПК КИК Л ОЗН БИ2 1 3 507 0 0 Удалить


Наименование Добавить
Наименование Тип Количество
287 TDK 2 2 Удалить
288 CLR 1 10 Удалить
289 RSC-E 2 1 Удалить
290 Sim 2 2 Удалить
297 Береговой 3 1 Удалить
298 Волков 3 1 Удалить

1С ВУЗ

1С продал примерно 50 комплектов автоматического составления расписаний занятий студентов в разные ВУЗы, в том числе в МИЭТ, Калининградский ГТУ, Мурманский ГТУ, Новосибирский ГУ, Тюменский ГУ, Вятский ГУ.



Проблемы внедрения: нет достаточно верифицированных баз, которые содержат учебный план, базу преподавателей, аудиторий и так далее.

Этапы работы

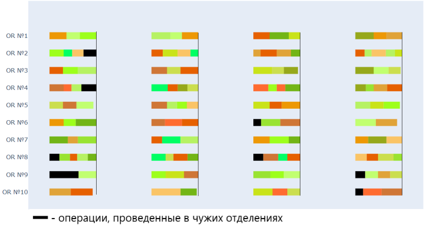
- Процесс госпитализации
- Работа хирургических отделений
- Работа анестезиологов
- Работа операционных

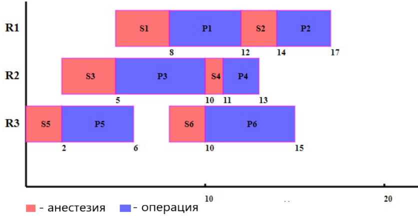
Проблематика:

- Коечный фонд заполнен неэффективно
- Врачи перегружены и работают во внеурочное время
- Работа отделений слабо согласована
- Обслуживание пациентов нерационально

Дано: m приборов (операционные), множество работ (операций) $N = 1, ..., n$, моменты поступления пациентов r_j, длительности операций p_j, директивные сроки операций d_j, штраф f_j, который больше 0, если операция j проводится в операционной не своего отделения, ведущее отделение dep_j операции j.

Примеры целевой функции: $\alpha(C_{max}|L_{max}|\sum_{j\in n} C_j) + \beta \sum_{j\in n} f_j \rightarrow min$

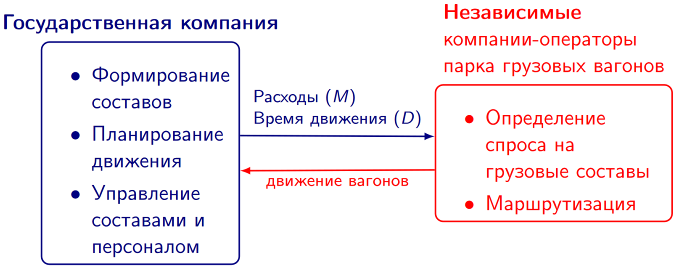




Дано: m приборов (операционные), l анестезиологов, множество работ (операций) $N = 1, ..., n$, моменты поступления пациентов r_j, длительности операций p_j, директивные сроки операций d_j, длительность работы s_j анестезиолога на операции j.

Примеры целевой функции: $(C_{max}|L_{max}|\sum_{j\in n} C_j) \rightarrow min$

- Задача формирования составов (первая грузовая компания) — сравнение разных подходов.
- Задача начальника станции:
  - задача формирования составов;
  - задача обслуживания локомотивов;
  - задача назначения локомотивов.
- Задача формирования фронтов:
  - задача работы портов;
  - задача работы грузовых фронтов.
- Задачи двух станций:
  - однопутный участок дороги;
  - однопутный участок дороги с разъездом;
  - перестраивание расписание с двупутного на однопутное.



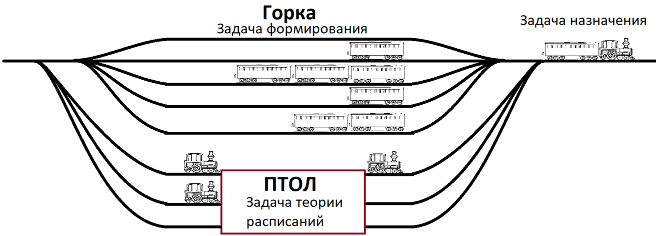
Значительные расстояния, средняя скорость движения крайне низка ($\approx$ 300 км/день): рационально планировать движение на дискретных интервалах в 1 день. Входные данные: граф железных дорог; начальное местоположение вагонов; прибыль от предлагаемых заказов на перевозку;стоимость перевозок и стоянки вагонов. Решение: операционный план. множество принятых заказов с директивными сроками; передвижения вагонов (пустых и с грузом), позволяющие выполнить заказы. Цель: максимизация прибыли.

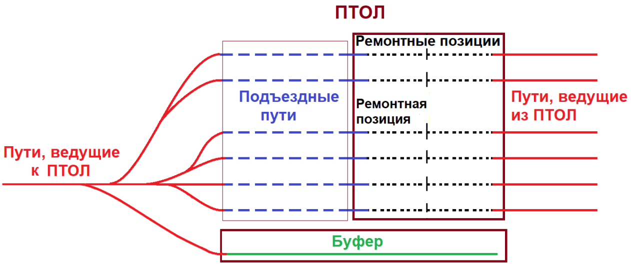
Название примера	x3	x3double	5k0711q
Число станций	371	371	1'900
Количество заказов	1'684	3'368	7'424
Количество типов вагонов	17	17	1
Количество вагонов	1'013	1'013	15'008
Количество начальных позиций	791	791	11'215
Горизонт планирования, дней	37	74	35
Число вершин, тыс.	62	152	22
Число дуг, тыс.	794	2'846	1'843
Время решения Direct	20 с.	1 ч. 34 м.	55 с.
Время решения ColGen	22 с.	7 м. 53 с.	8 м. 59 с.
Время решения ColGenEF	3 м. 55 с.	>2 ч.	43 с.

1'025 станций, 6'800 заказов, 11 типов вагонов, 12'651 вагонов, 8'232 источников. $\approx$ 300 тысяч вершин, 10 миллионов дуг. Сходимость ColGenEF – менее 15 итераций.

Horizon	Direct	ColGenEF
80	5m24s	1m52s
90	7m05s	1m47s
100	9m42s	2m19s
110	13m38s	3m11s
120	17m19s	3m57s
130	25m52s	5m03s
140	35m08s	5m25s
150	44m58s	7m02s
160	57m11s	8m19s
170	1h13m58s	10m53s
180	1h26m46s	12m16s

- Задача формирования – расформирование прибывших на станцию поездов и формирование новых составов.
- Задача обслуживания – локомотивы должны пройти периодическое техническое обслуживание в Пункте Технического Обслуживания Локомотивов (ПТОЛ).
- Задача назначения – на сформированные составы необходимо назначить локомотивы для отправки поездов.





Для каждого локомотива необходимо определить:

- должен ли локомотив отправиться на буферный участок,
- тракционный путь, на который локомотив должен отправиться,
- момент времени отправки локомотива на тракционный путь,
- момент времени начала обслуживания локомотива,
- ремонтную позицию, на которой локомотив должен пройти техническое обслуживание.

Целевая функция: $F(\pi) = \max\limits_{l \in L} C_l(\pi) \to \min$ Для общего случая разработан эвристический, сравненный с оптимизатором для различных типовых случаев.

	Эвристика	CPLEX
ПТОЛ 1	1506	1494
ПТОЛ 2	1613	1613
ПТОЛ 3	1435	1414

Динамическое программирование для выделенного случая:
$h(t,k) = \min\{(h_1(t,k), h_2(t,k)\}$. Если к моменту t необслуженным остался один локомотив, то

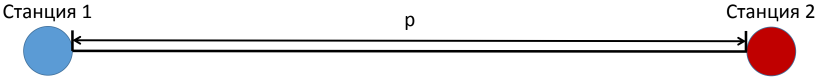
$$h(t,1) = h_1(t,1) = \max\{t, r_1\} + p_1,$$

$$h_2(t,1) = +\infty.$$

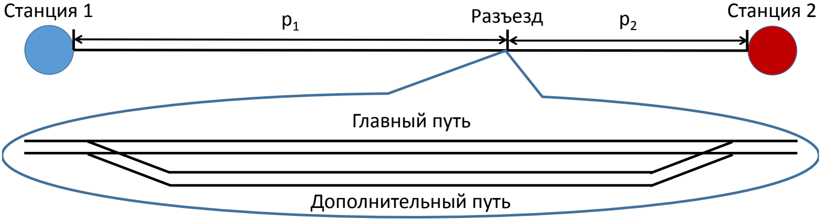
$$h_1(t,k) = h(\max\{t, r_k\} + p_k, k-1),$$

$$h_2(t,k) = \begin{cases} h_1(t,k-1) + \max\{0, p_k - p_{k-1}\}, \text{ количество секций} < 4 \\ +\infty, \text{количество секций} = 4. \end{cases}$$

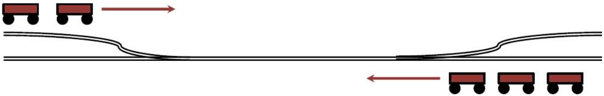
Модель без разъезда



Задача	Сложность
$STR2 \mid \mid L_{max}$	$O(n^2)$
$STR2 \mid \mid \sum w_j C_j$	$O(n^2)$
$STR2 \mid \mid \max_{j \in N} \varphi_j(C_j(\sigma))$	$O(n^5 \log n)$
$STR2 \mid p(j), \lambda \mid L_{max}$	$O(n^\lambda)$
$STR2 \mid p(j), \lambda \mid \sum w_j C_j$	$O(n^\lambda)$
$STR2 \mid p(j), \lambda \mid \sum U_j(\sigma)$	$O(n^{2\lambda})$
$STR2 \mid p(j), \lambda \mid \bigodot_j \varphi(C_j)$	$O(n^{\alpha^2+\alpha} n^\lambda)$
$STR2 \mid p(j), \lambda, V \mid \max_{j \in N} \varphi_j(C_j(\sigma))$	$O(q^2 \log q n^{2\alpha^2+2\alpha+1} n^\lambda \log n)$



Задача	Сложность
$STR2 - siding \mid\mid C_{max}$	аналитическое решение
$STR2 - siding \mid\mid L_{max}$	$O(n^2)$
$STR2 - siding \mid\mid \sum w_j C_j$	$O(n^2)$



Дано: n_1 поездов в одном направлении, n_2 поездов в другом направлении, время движения по однопутному участку p, интервал безопасности β, известно исходное расписание движения поездов без закрытия участка дороги: r_s^i — момент доступности поезда i в направлении s.

1. Полиномиальное множество моментов начала движения поездов по однопутному участку

$$T = \{t \mid t = r_s^i + m_1\beta + m_2 p,\ s \in \{1,2\}, i \in N_s, m_1 \in \{0,1,\dots,n_1+n_2-2\},$$

$$m_2 \in \{0,1,\dots,2\min\{n_1,n_2\}\}\},\quad |T| = O(n^3)$$

2. Известен порядок отправления поездов с каждой стороны? Достаточно знать количество еще не отправленных поездов с каждой станции, что значительно уменьшает перебор вариантов.

3. Система рассматривается только в моменты отправления поездов по однопутному участку. Система описывается состоянием (k_1, k_2, s, t), где k_i — количество поездов, еще не отправленных по участку в i-м направлении; s — станция отправления; $t \in T$ — время отправления.

Теория

- аксиоматизация
- систематизация алгоритмов
- построение базы алгоритмов
- ...

Практика

- умный город
- интернет вещей
- автоматизация транспорта
- мегасеть спутников
- карманный искусственный интеллект
- многопроцессорные системы

Спасибо за внимание!

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Лазарев А. А.

www.orsot.ru
jobmath@mail.ru

Москва, 2021