Прикладной статистический анализ данных.
1. Введение: распределения, статистики, оценки, гипотезы.

Константин Воронцов
psad.homework@gmail.com

1, 2017

Зачем нужен этот курс

- специфические статистические методы для конкретных постановок задач
- границы применимости методов
- статистическое мышление

Зачем нужен этот курс

- специфические статистические методы для конкретных постановок задач
- границы применимости методов

  (Marriott, 1974): If the results disagree with informed opinion, do not admit a simple logical interpretation, and do not show up clearly in a graphical presentation, they are probably wrong. There is no magic about numerical methods, and many ways in which they can break down. They are a valuable aid to the interpretation of data, not sausage machines automatically transforming bodies of numbers into packets of scientific fact.
- статистическое мышление

Зачем нужен этот курс

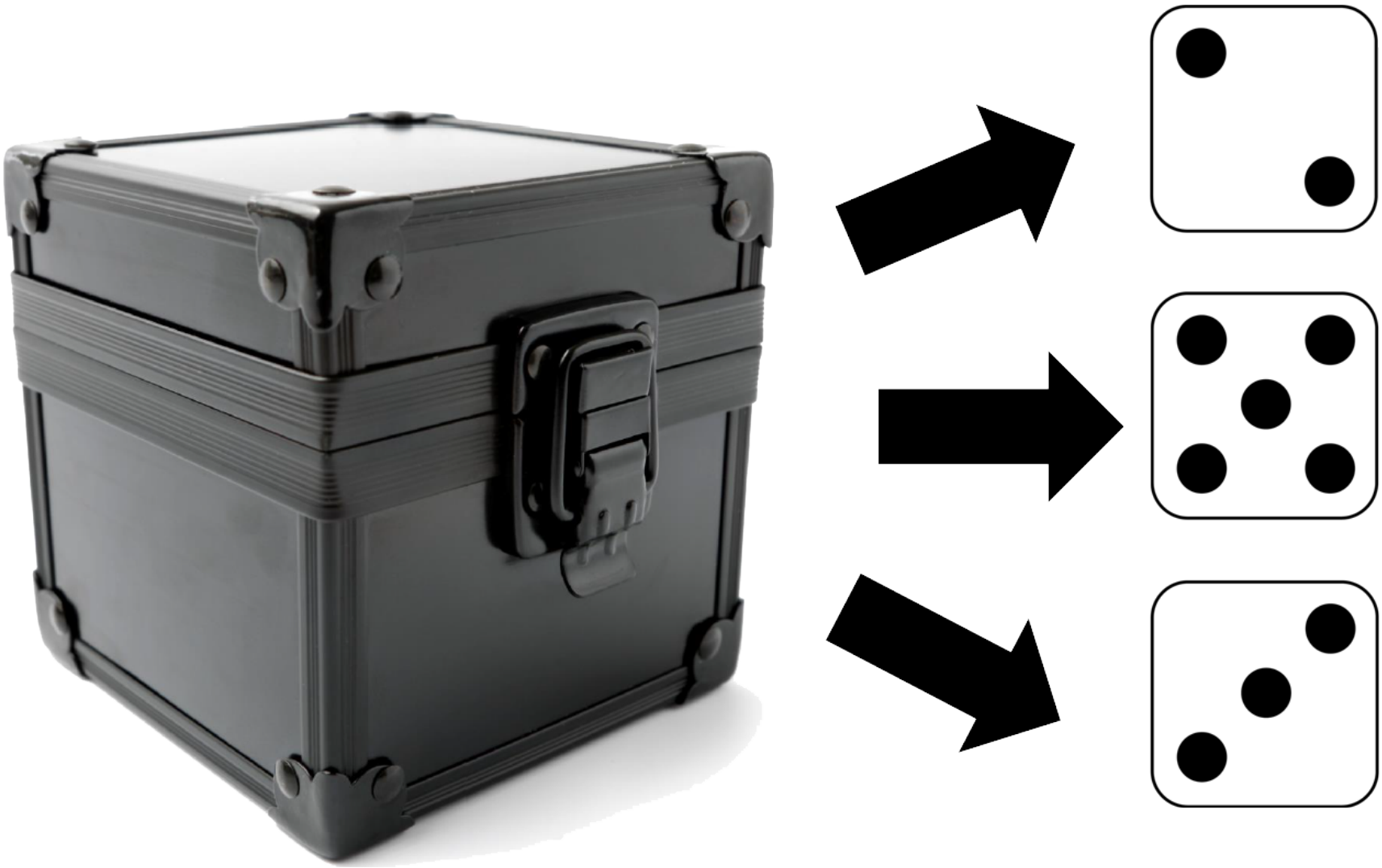
- специфические статистические методы для конкретных постановок задач
- границы применимости методов
- статистическое мышление

  (Begg et al., 1992): понимание механизмов работы статистики позволяет находить менее стереотипные и более осознанные решения повседневных задач.

Случайность

Случайность

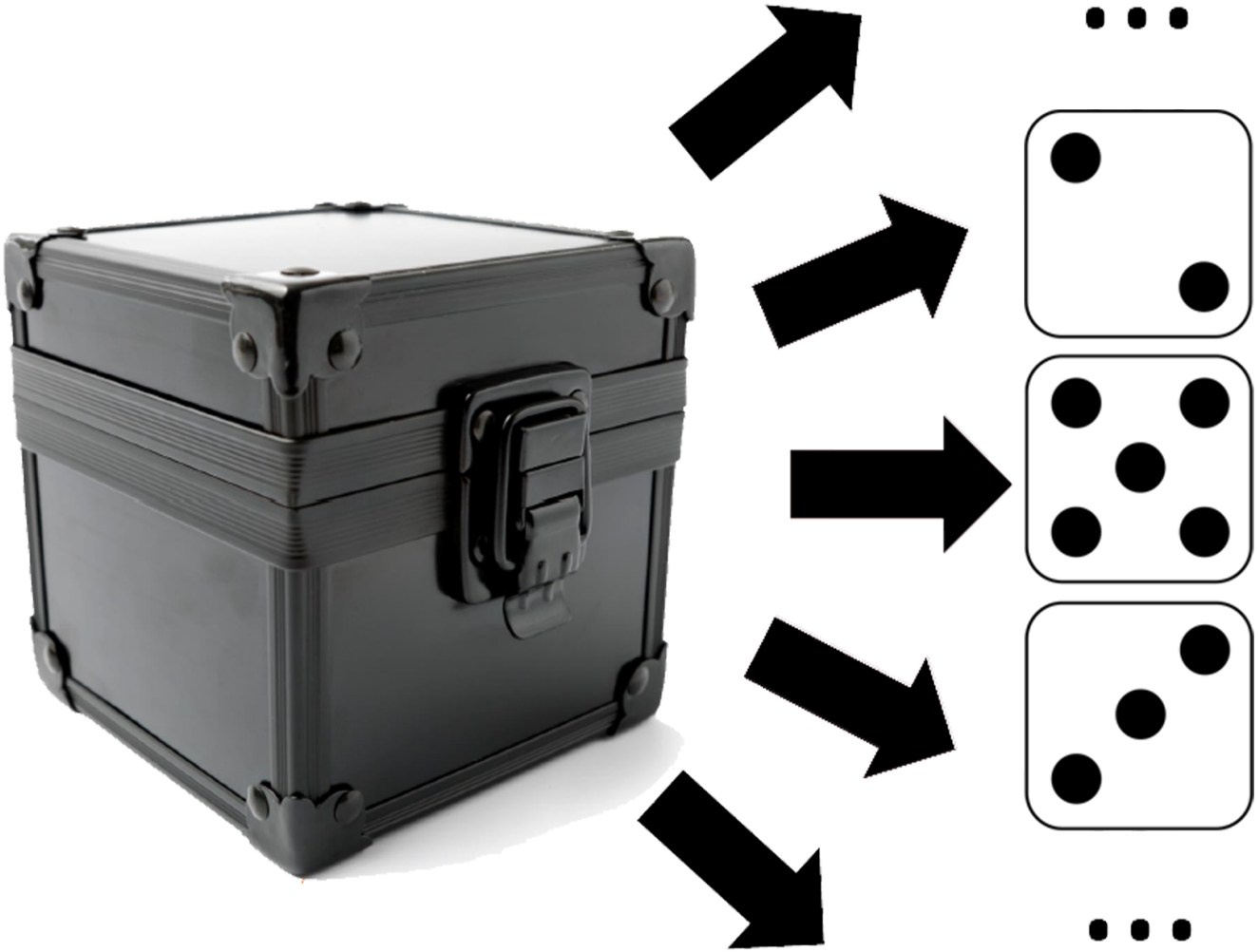
Случайность



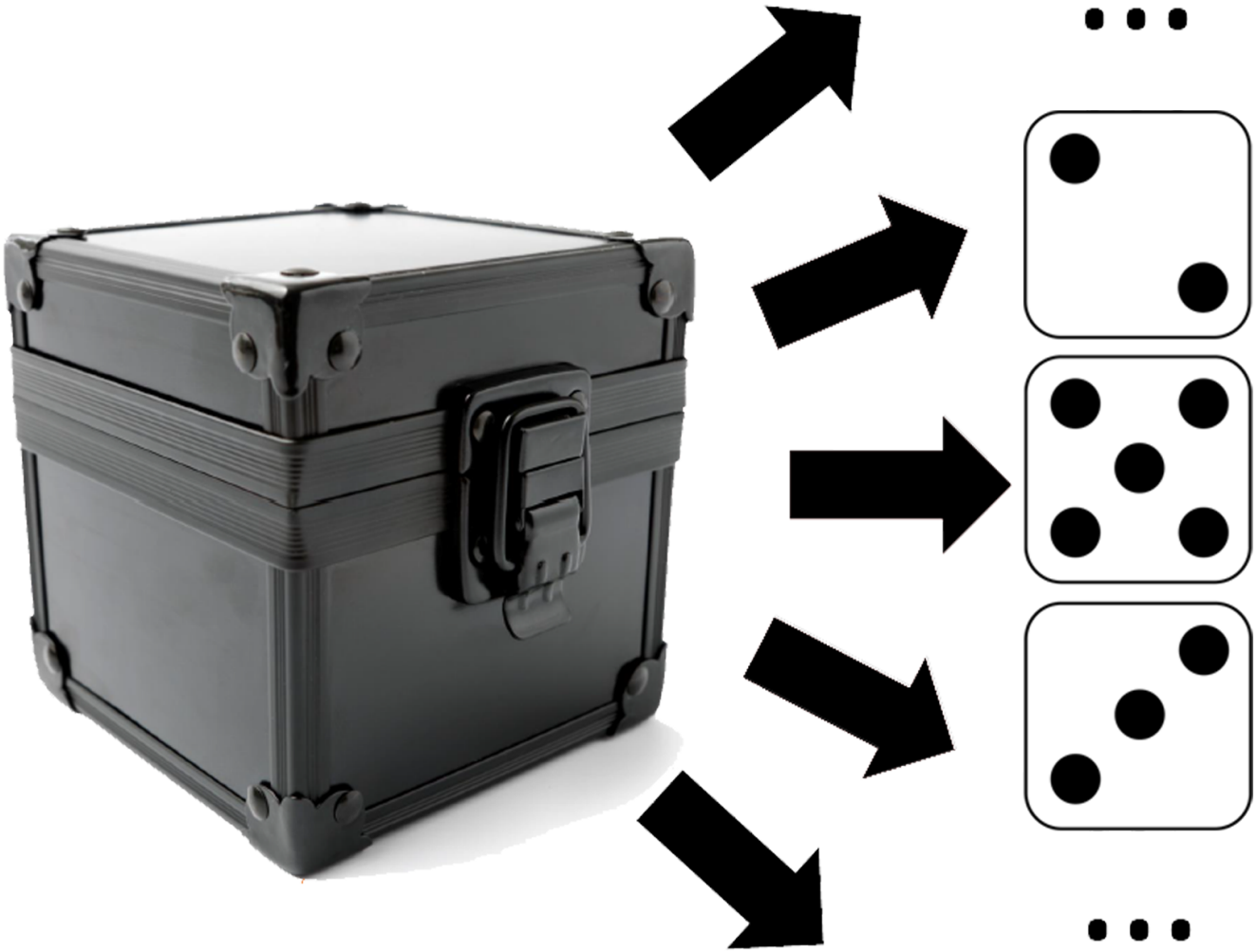
Случайность

Случайность

Изучение случайности



Изучение случайности



Вероятность события — доля испытаний, завершившихся наступлением события, в бесконечном эксперименте.

Изучение случайности

Изучение случайности

Изучение случайности

Закон больших чисел: на больших выборках частота события хорошо приближает его вероятность.

Описание случайных величин

Дискретная случайная величина X принимает счётное множество значений $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots$, $\sum\limits_i p_1 = 1$.

$f_X(a_i) = \mathbf{P}(X = a_i) = p_i$ — **функция вероятности**.

Непрерывная случайная величина задаётся с помощью **функции распределения**:

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$$

или **плотности распределения**:

$$f_X(x) : \int\limits_a^b f_X(x)\,dx = \mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b)$$

.

Характеристики распределений

- **матожидание** — среднее значение X:

$$\mathbb{E}X = \int x\, dF(x)$$

- **дисперсия** — мера разброса X:

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$$

- **квантиль** порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$X_\alpha: \quad \mathbf{P}(X \leqslant X_\alpha) \geqslant \alpha, \quad \mathbf{P}(X \geqslant X_\alpha) \geqslant 1 - \alpha$$

эквивалентное определение:

$$X_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x: F(x) \geqslant \alpha\}$$

- **медиана** — квантиль порядка 0.5, центральное значение распределения:

$$\operatorname{med} X: \quad \mathbf{P}(X \leqslant \operatorname{med} X) \geqslant 0.5, \quad \mathbf{P}(X \geqslant \operatorname{med} X) \geqslant 0.5$$

- **интерквартильный размах**:

$$IQR = X_{0.75} - X_{0.25}$$

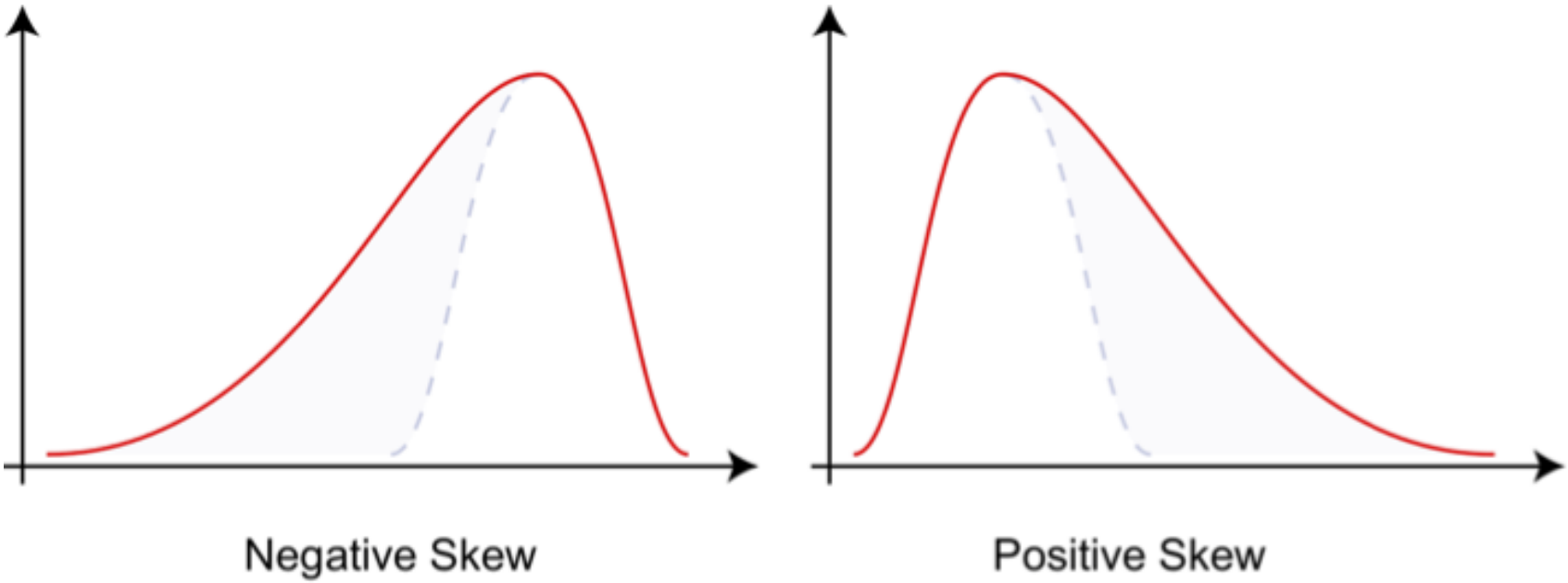
- **мода** — точка максимума функции вероятности или плотности:

$$\operatorname{mode} X = \operatorname*{argmax}_x f(x)$$

Характеристики распределений

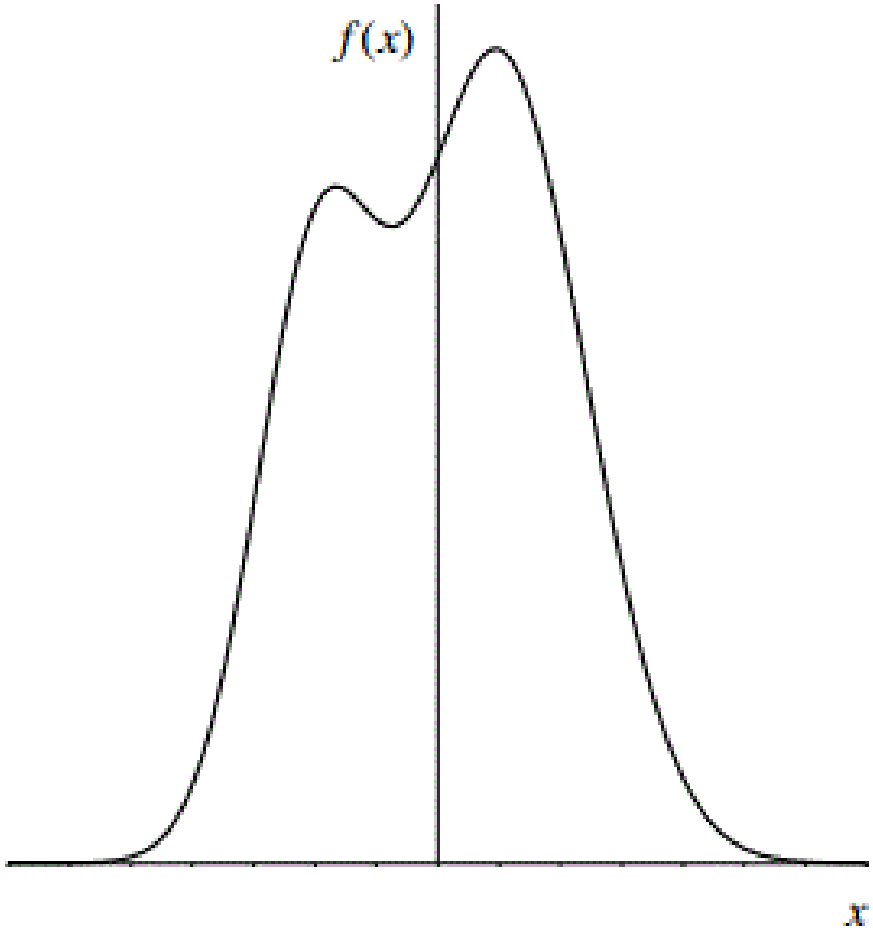
- **коэффициент ассиметрии** (skewness):

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathbb{D}X}}\right)^3$$



Характеристики распределений

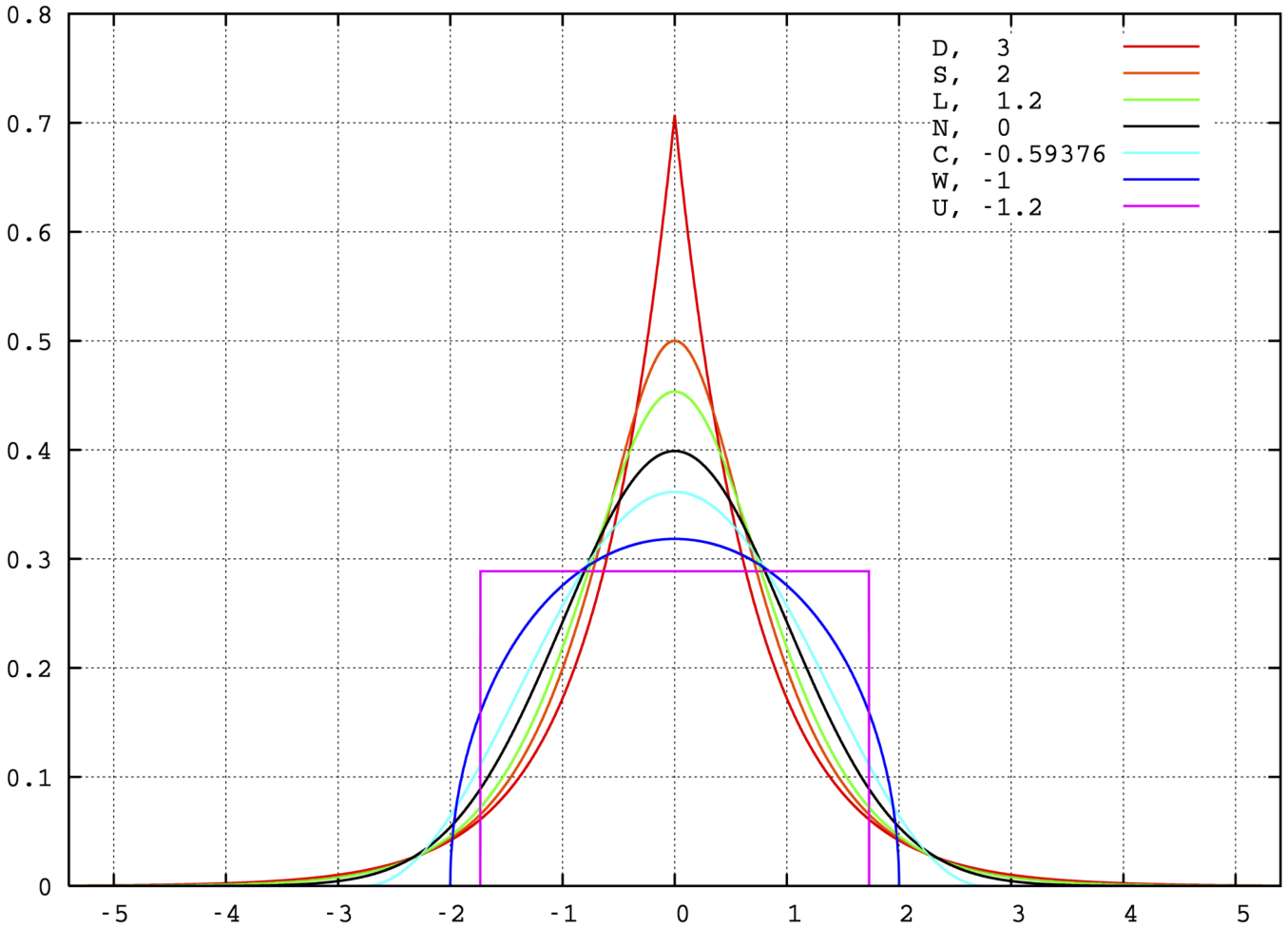
$\gamma_1 = 0$ — необходимое, но не достаточное условие симметричности:



Характеристики распределений

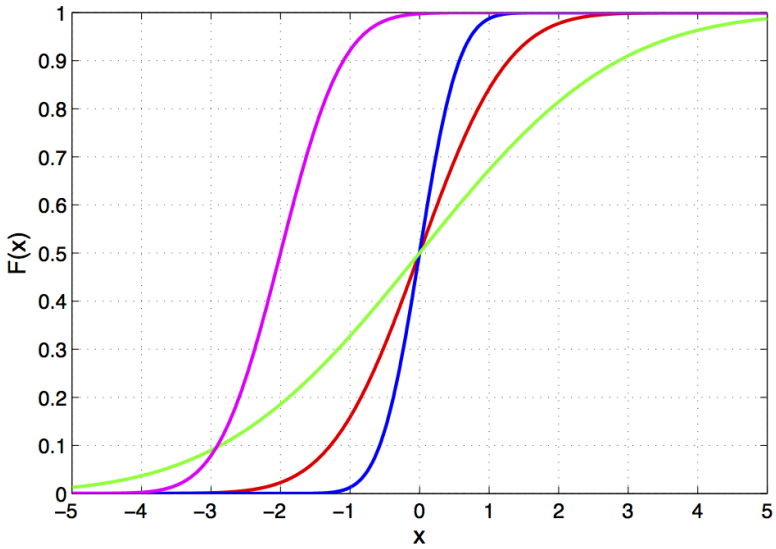
- **коэффициент эксцесса** (excess, без вычитания тройки — kurtosis):

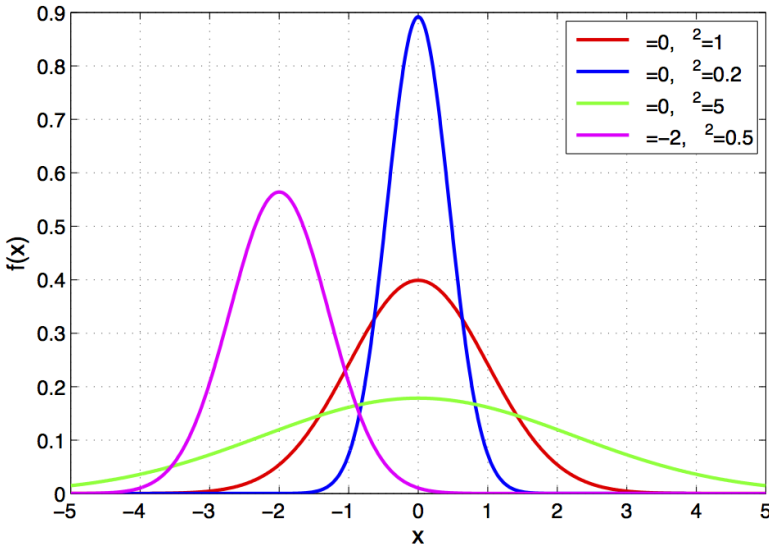
$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}X\right)^4}{\left(\mathbb{D}X\right)^2} - 3$$



Нормальное распределение

$$X \in \mathbb{R} \sim N\left(\mu, \sigma^2\right),\ \sigma^2 > 0$$





$$F\left(x\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Нормальное распределение

- предельное распределение суммы слабо взаимозависимых сл. в.
- $\mathbb{E}X = \operatorname{med} X = \operatorname{mode} X = \mu$, $\mathbb{D}X = \sigma^2$, все моменты более высокого порядка нулевые
- пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, тогда $\forall a_1, \ldots, a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

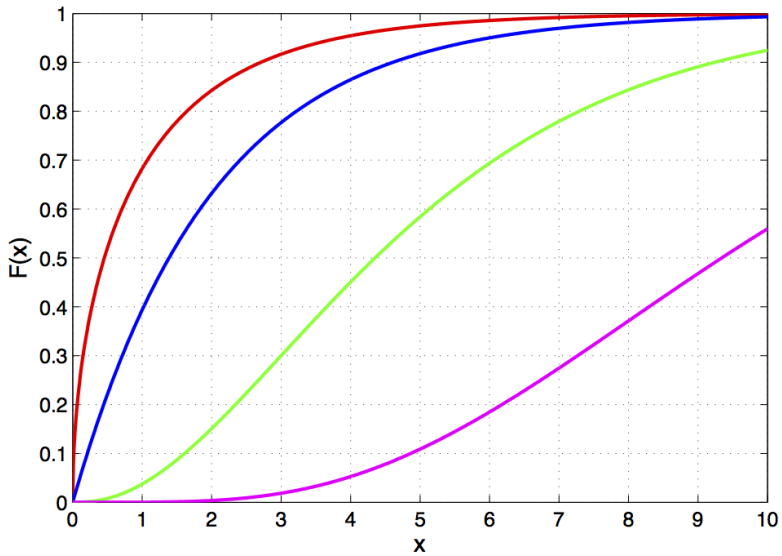
- центральная предельная теорема: пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. с $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{D}X < \infty$, тогда

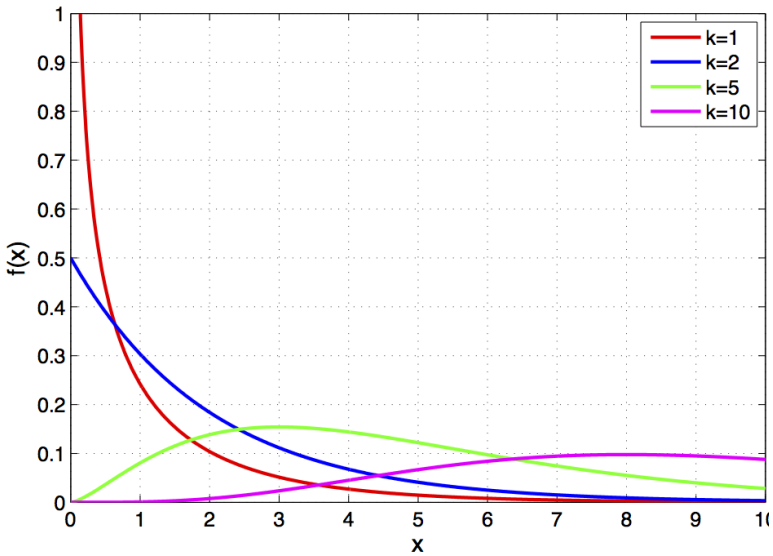
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim\approx N\left(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n}\right)$$

- пример: погрешность измерения

Распределение хи-квадрат

$X \in \mathbb{R}_+ \sim \chi^2_k,\ k \in \mathbb{N}$





$$F\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

$$f\left(x\right) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

$\Gamma\left(x\right) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция

$\gamma\left(a, x\right) = \int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt$ — нижняя неполная гамма-функция

Распределение хи-квадрат

- пусть $X_1, \ldots, X_k$ — i.i.d., $X_i \sim N(0,1)$, тогда

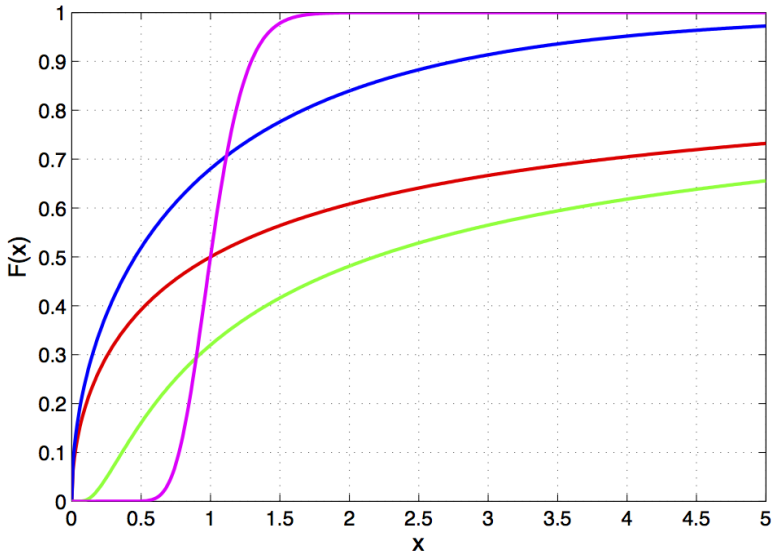
$$\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi_k^2$$

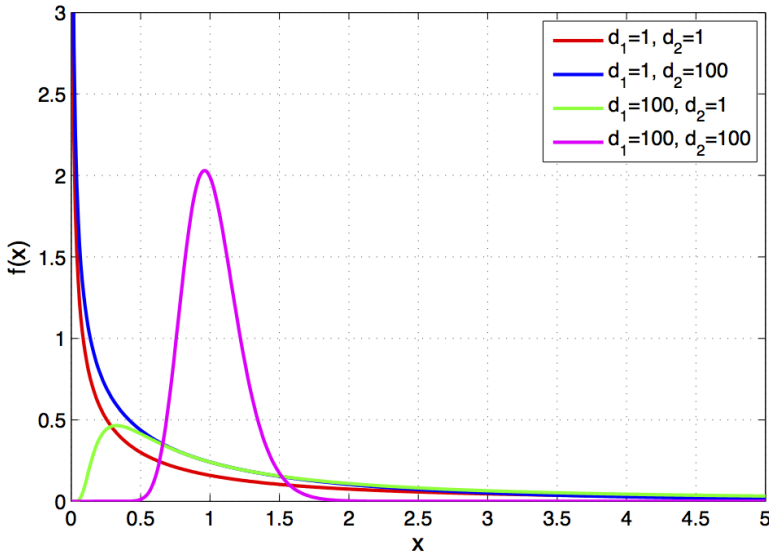
- пример: нормированная выборочная дисперсия:

$$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Распределение Фишера

$$X \in \mathbb{R}_+ \sim F(d_1, d_2),\ d_1, d_2 > 0$$





$$F(x) = I_{\frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1}\, d_2^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1 + d_2}}} \Big/ xB\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)$$

$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ — бета-функция

$I_x(a,b) = \frac{B(x;a,b)}{B(a,b)}$ — регуляризованная неполная бета-функция

$B(x;a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ — неполная бета-функция

Распределение Фишера

- пусть $X_1 \sim \chi^2_{d_1}$, $X_2 \sim \chi^2_{d_2}$, X_1 и X_2 независимы, тогда

$$\frac{X_1/d_1}{X_2/d_2} \sim F(d_1, d_2)$$

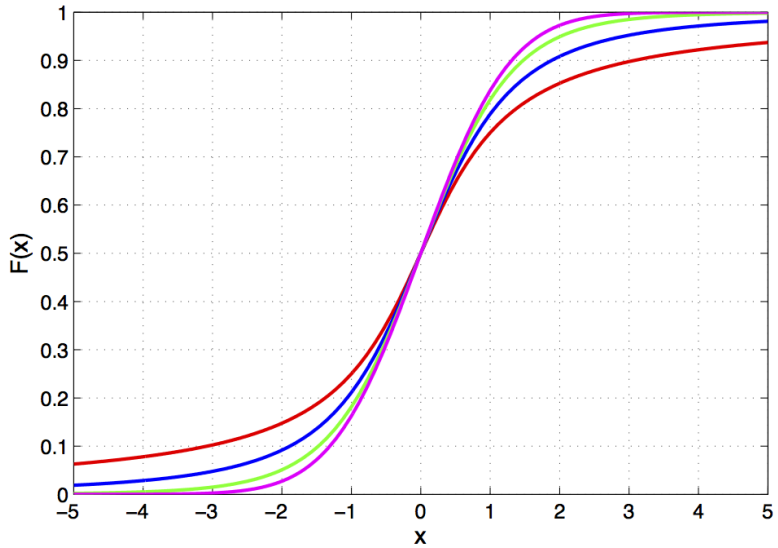
- если $X \sim F(d_1, d_2)$, то

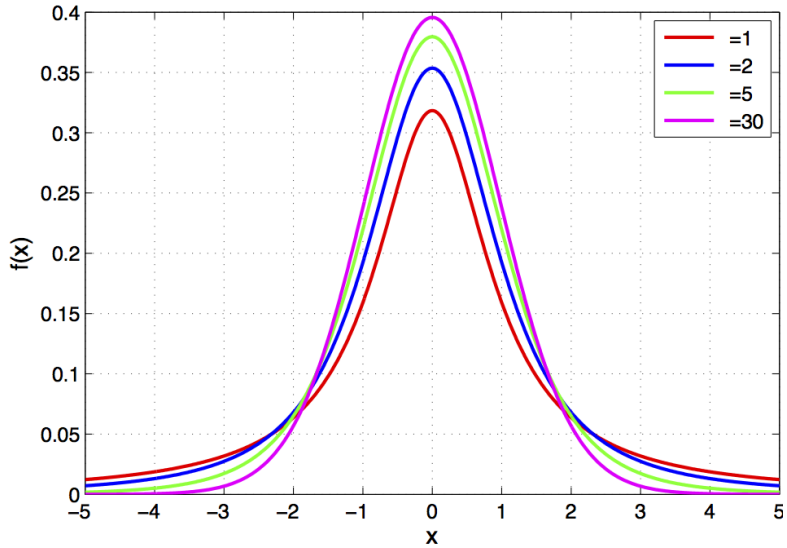
$$Y = \lim_{d_2 \to \infty} d_1 X \sim \chi^2_{d_1}$$

- $F(x, d_1, d_2) = F(1/x, d_2, d_1)$
- возникает в дисперсионном и регрессионном анализе

Распределение Стьюдента

$$X \in \mathbb{R} \sim St(\nu),\ \nu > 0$$





$$F(x) = \frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Распределение Стьюдента

- $\mathbb{E}X = 0$ при $\nu > 1$, $\operatorname{med} X = \operatorname{mode} X = 0$ всегда
- пусть $Z \sim N(0,1)$ и $V \sim \chi^2_\nu$ независимы, тогда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} \sim St(\nu)$$

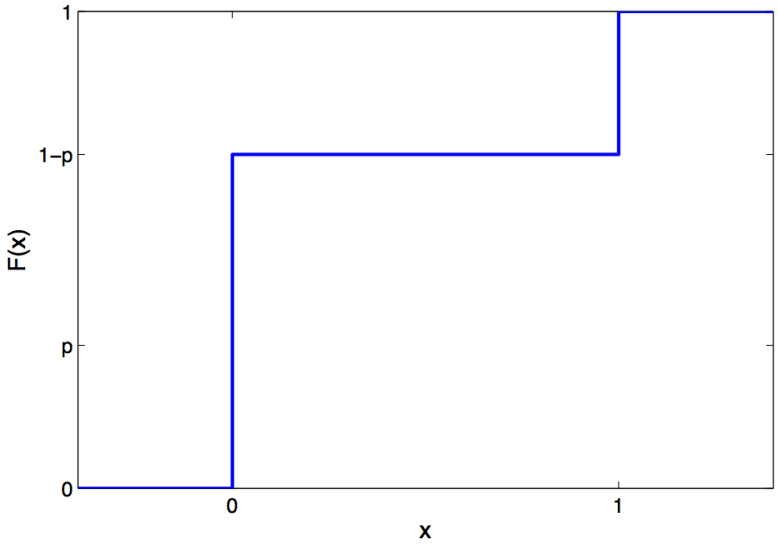
- если $X \sim St(\nu)$, то

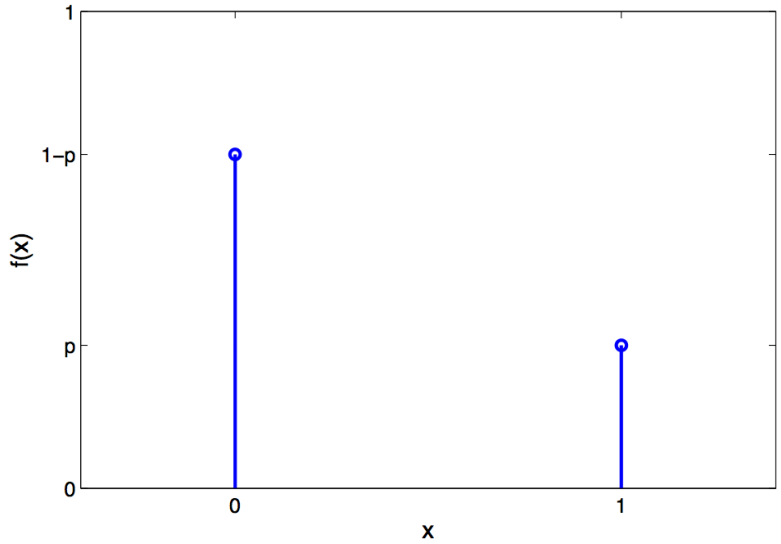
$$Y = \lim_{\nu \to \infty} X \sim N(0,1)$$

- возникает при оценке среднего значения сл. в. с неизвестной дисперсией

Распределение Бернулли

$$X \in \{0,1\} \sim Ber\,(p)\,,\quad p \in (0,1)$$





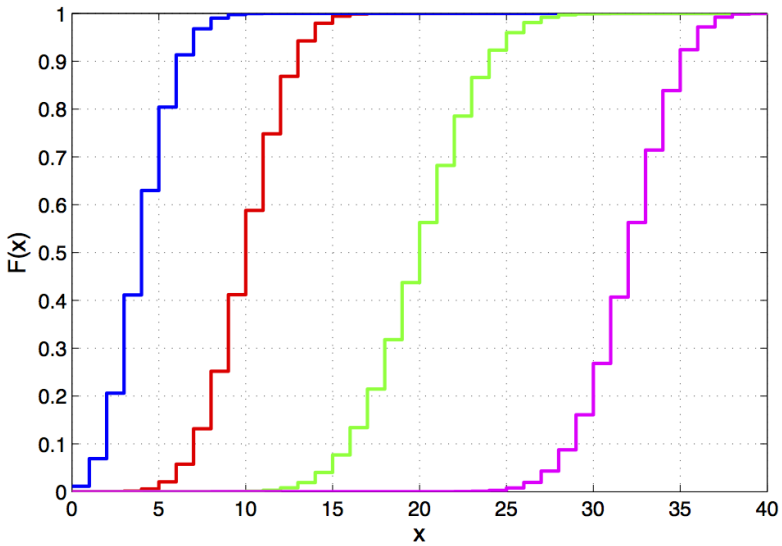
$$F\,(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

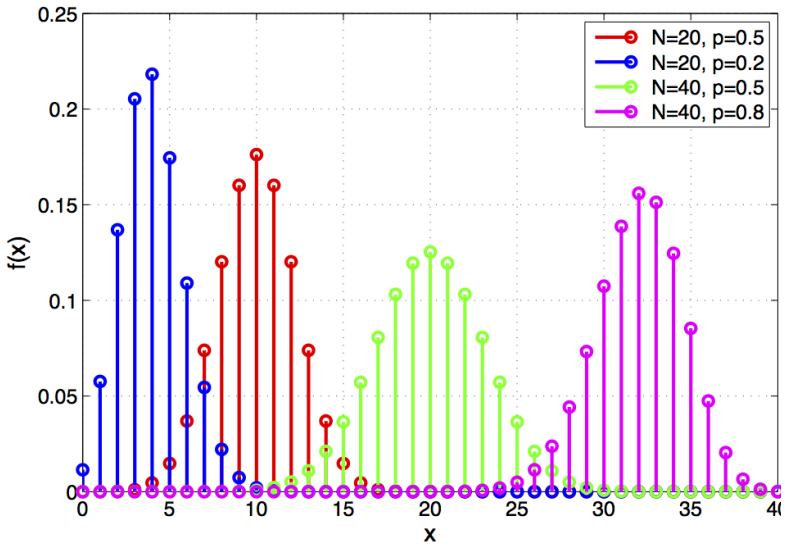
$$f\,(x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0, \\ p, & x = 1. \end{cases}$$

- пример: результат подбрасывания монеты

Биномиальное распределение

$$X \in \{0, \ldots, N\} \sim Bin\,(N, p)\,,\ N \in \mathbb{N},\ \ p \in [0, 1]$$





$$F\,(x) = I_{1-p}\,(N - x, 1 + x)$$

$$f\,(x) = C_N^x p^x\,(1 - p)^{N-x}$$

Биномиальное распределение

- пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $X_i \sim Ber(p)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p).$$

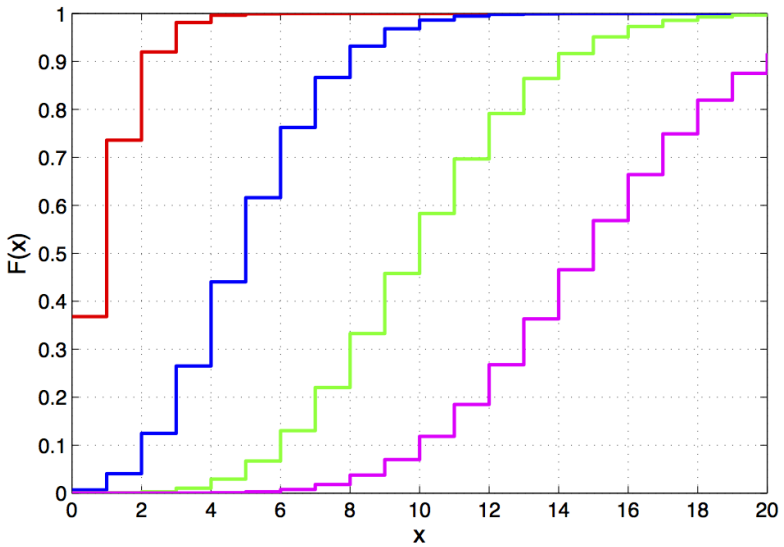
- $Bin\,(1, p) = Ber\,(p)$
- если $N > 20$ и p не слишком близко к нулю или единице, то для $X \sim Bin\,(N, p)$ справедлива нормальная аппроксимация:

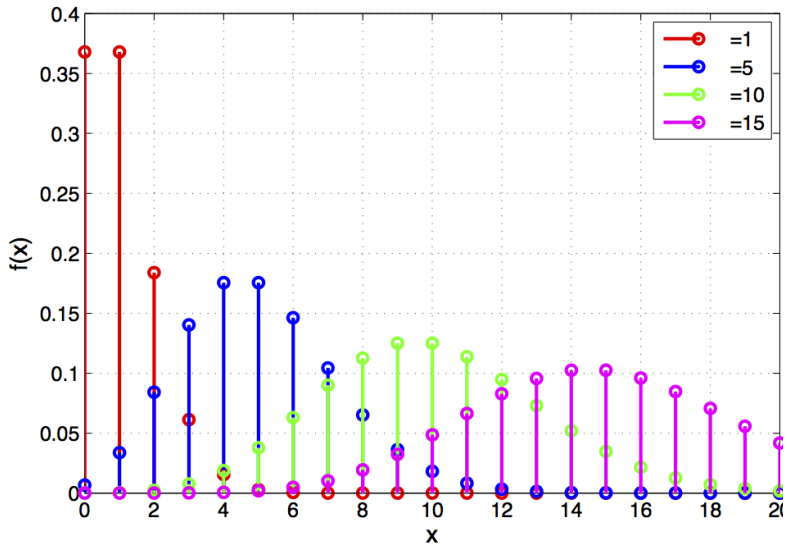
$$F_X\,(x) \approx \Phi\left(\frac{x - Np}{\sqrt{Np\,(1-p)}}\right)$$

- пример: число попаданий из N бросков в баскетбольное кольцо

Распределение Пуассона

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\} \sim Pois(\lambda), \ \lambda > 0$$





$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Распределение Пуассона

- распределение числа независимых событий в фиксированном временном или пространственном интервале
- $\mathbb{E}X = \mathbb{D}X = \lambda$
- пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $X_i \sim Pois(\lambda_i)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- если $X \sim Pois(\lambda)$, $Y = \sqrt{X}$, то при больших λ

$$F_Y(x) \approx \Phi\left(\frac{x - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

- пример: количество изюма в булочке с изюмом

Выборка

Генеральная совокупность — множество объектов, свойства которых подлежат изучению в рассматриваемой задаче.

Выборка — конечное множество объектов, отобранных из генеральной совокупности для проведения измерений.

$$X^n = (X_1, \ldots, X_n)\,.$$

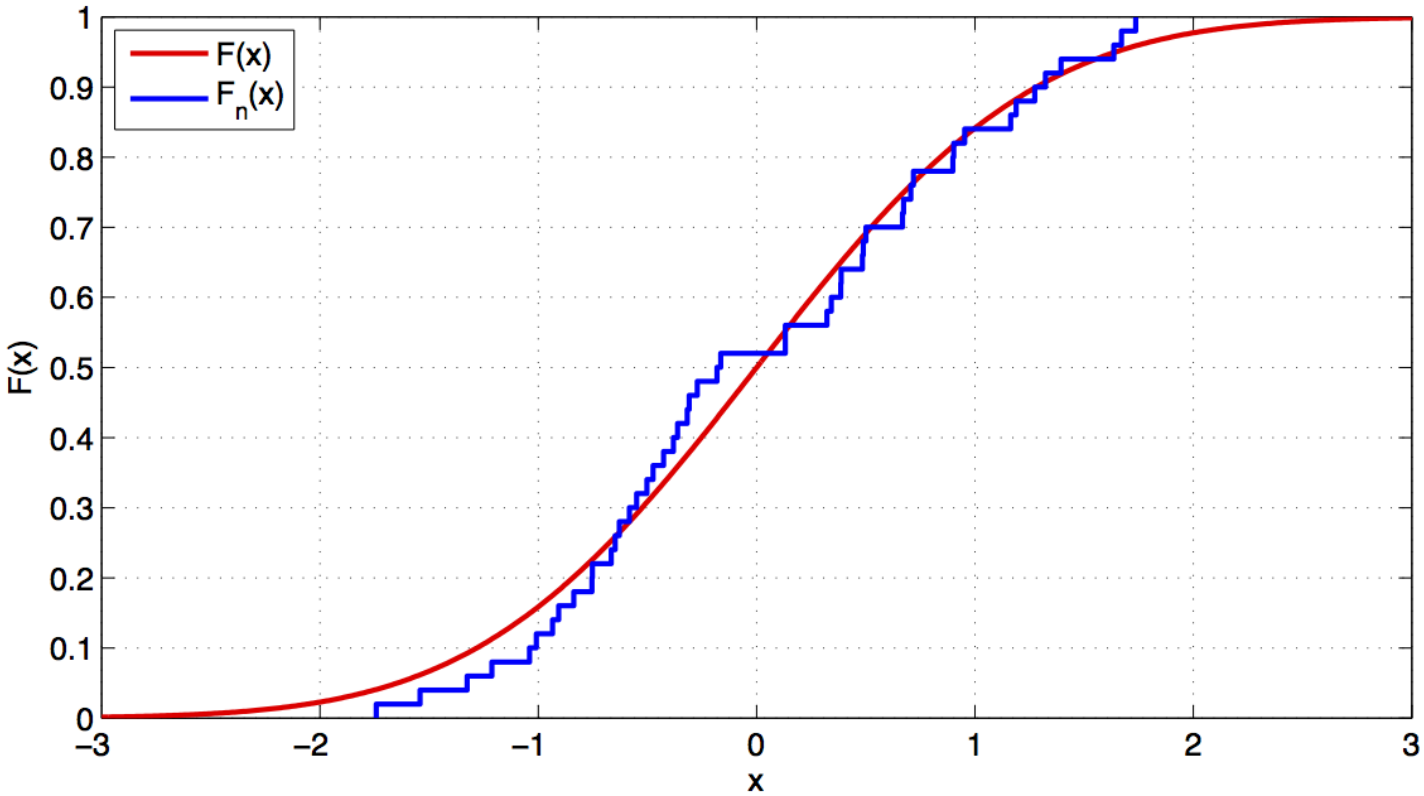
n — **объём выборки**.

X^n — **простая выборка**, если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины (i.i.d.).

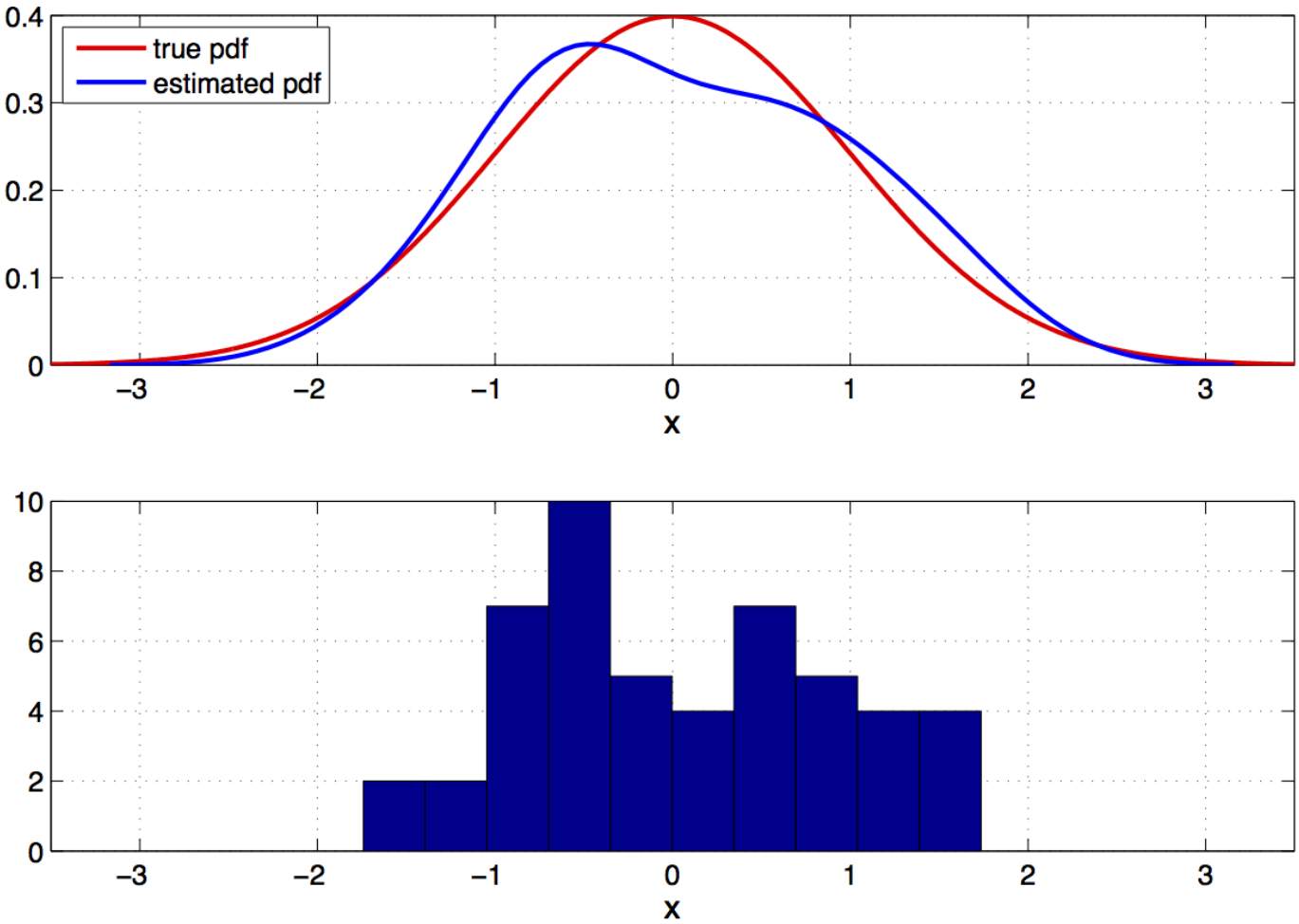
Основная задача статистики — описание $F_X(x)$ по реализации выборки.

Функция распределения

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i \leqslant x]$ — **эмпирическая функция распределения.**



Плотность распределения



Статистика

Статистика $T(X^n)$ — любая измеримая функция выборки.

- выборочное среднее:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

вариационный ряд:

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$$

ранг элемента выборки X_i:

$$\operatorname{rank}(X_i) = r\colon\ X_i = X_{(r)}$$

- k-я порядковая статистика: $X_{(k)}$
- выборочный α-квантиль: $X_{([n\alpha])}$
- выборочная медиана:

$$m = \begin{cases} X_{(k+1)}, & \text{если } n = 2k+1, \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Статистика

- выборочный интерквартильный размах:

$$IQR_n = X_{([0.75n])} - X_{([0.25n])}$$

- выборочный коэффициент ассиметрии:

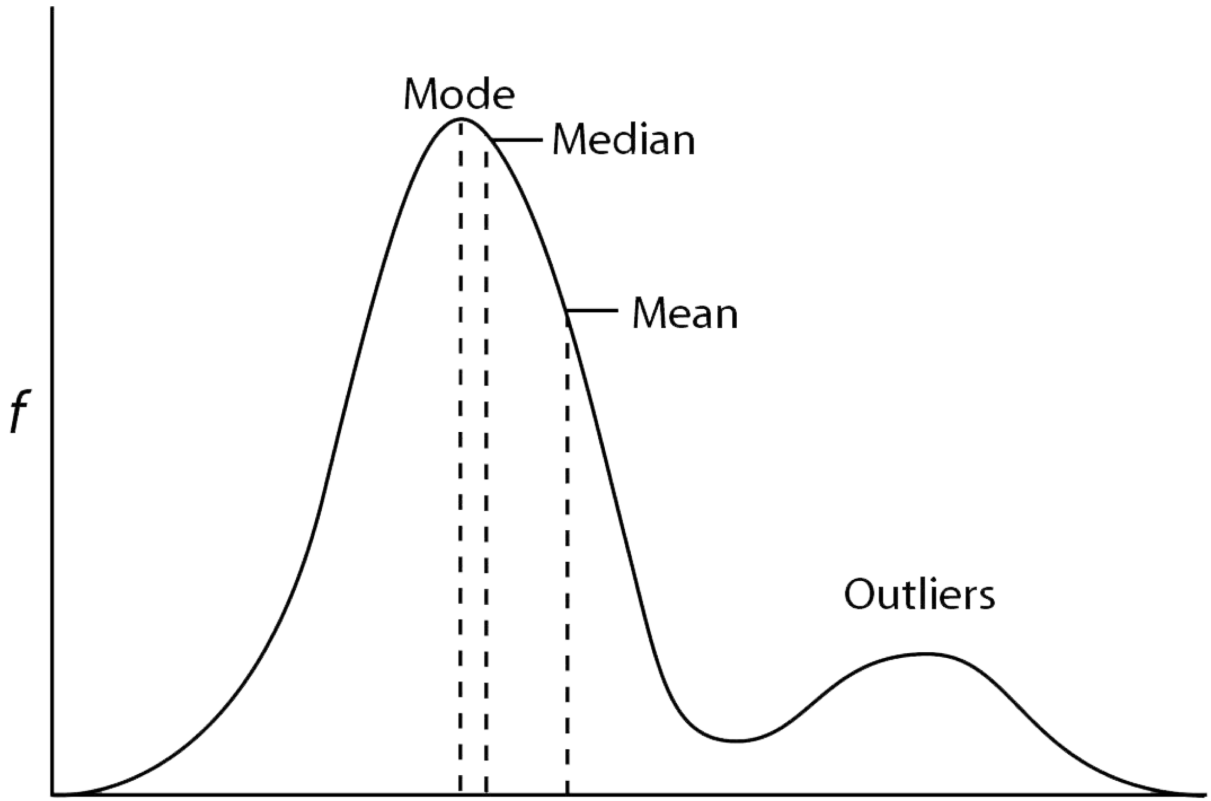
$$g_1 = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^3}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{3/2}}$$

- выборочный коэффициент эксцесса:

$$g_2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^4}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^2} - 3$$

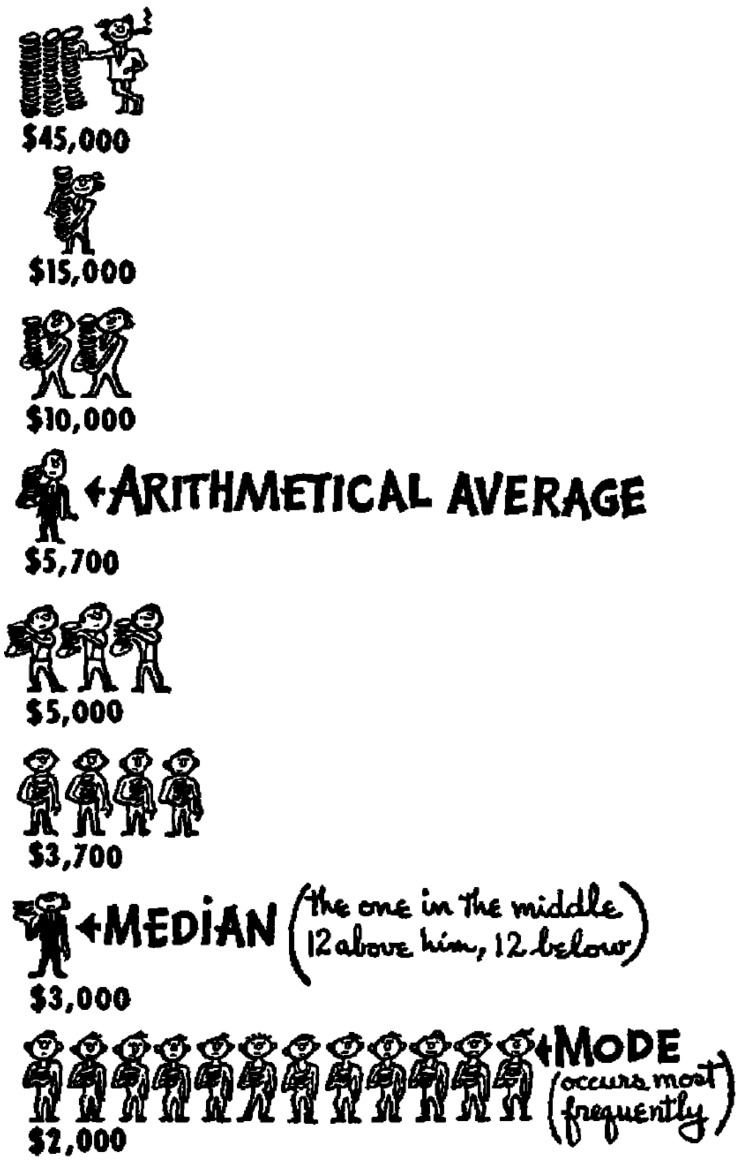
Оценки центральной тенденции

Выборочное среднее — среднее арифметическое по выборке.
Выборочная медиана — центральный элемент вариационного ряда.
Выборочная мода — самое распространённое значение в выборке.

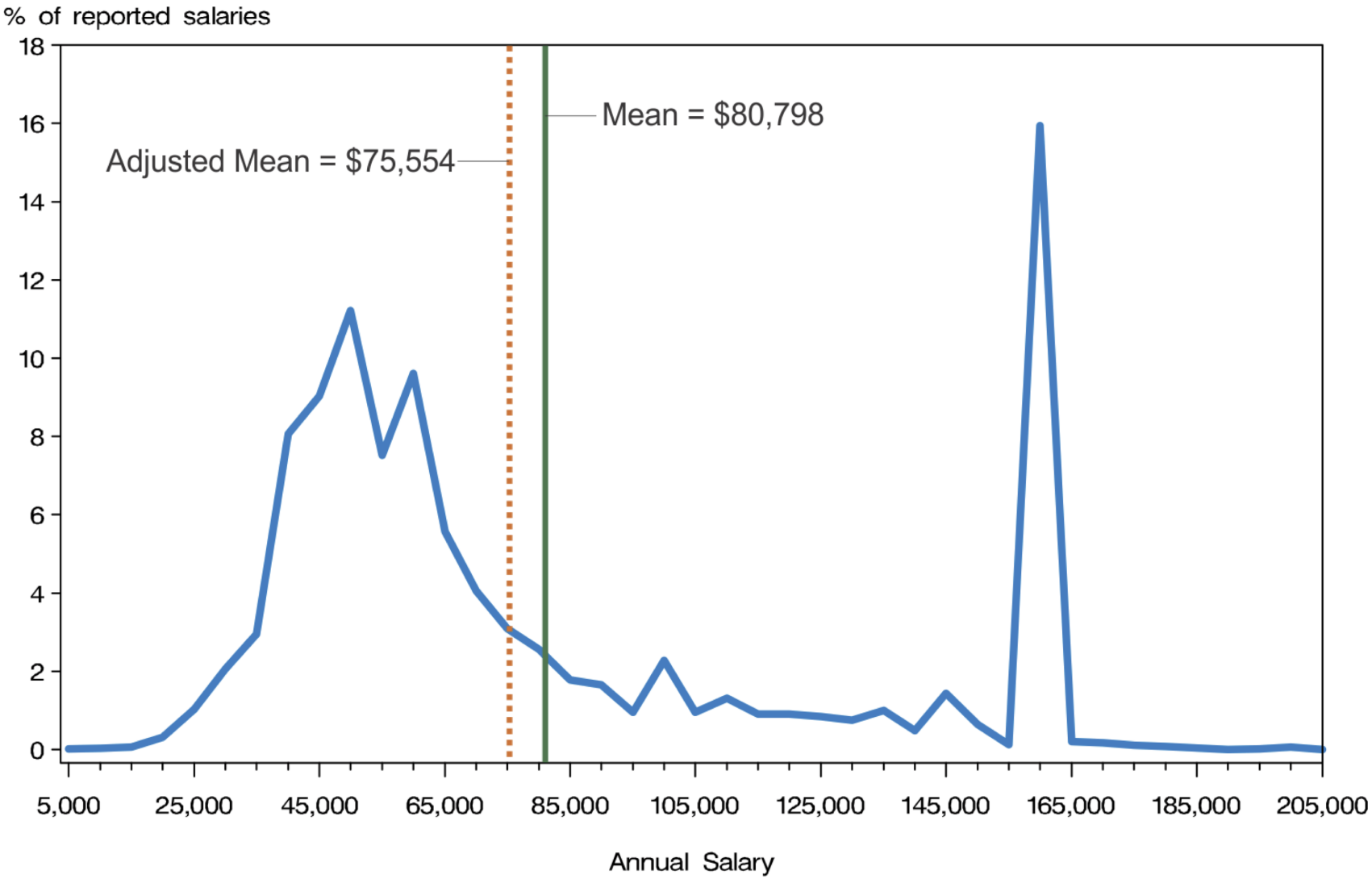


Оценки центральной тенденции

(Huff, 1954):



Об ограниченности статистик



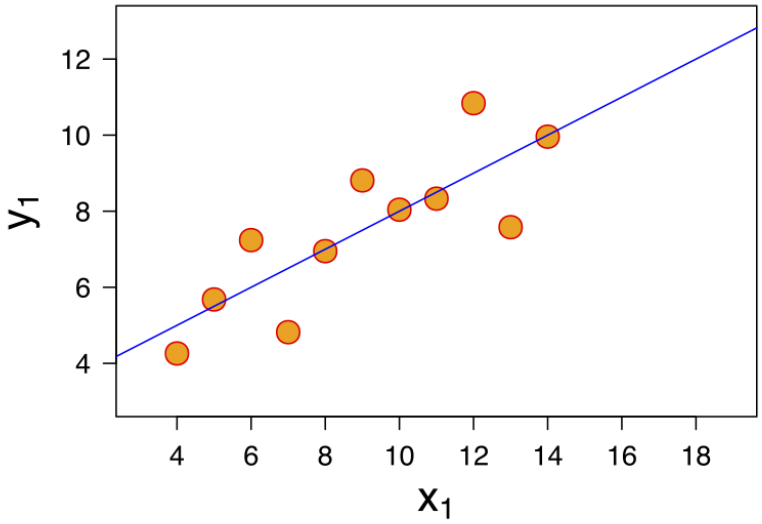
Уровень стартовой заработной платы выпускников юридических факультетов, США, 2012, данные NALP.

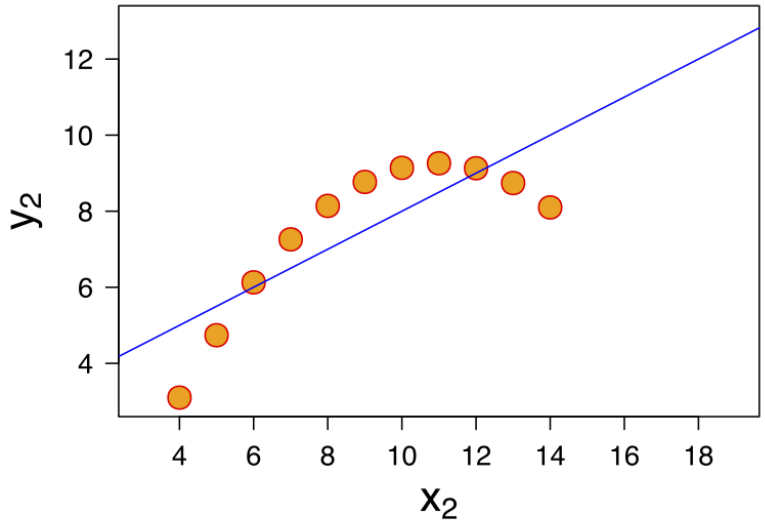
Об ограниченности статистик

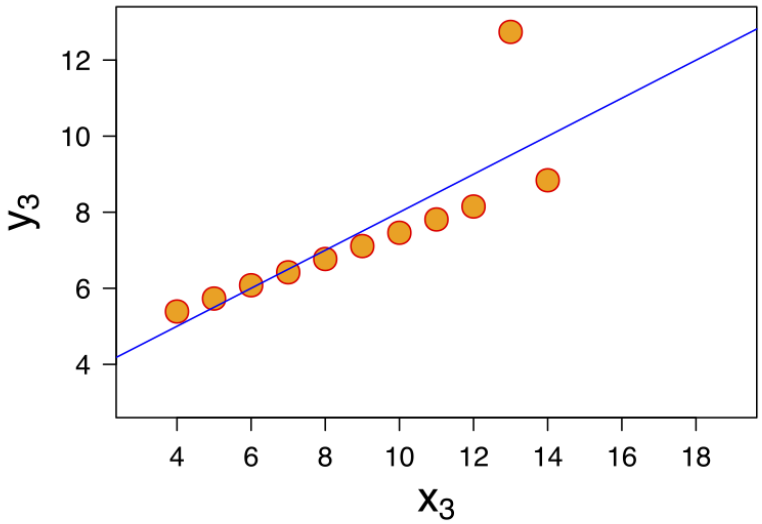
Квартет Энскомба (Anscombe, 1973):

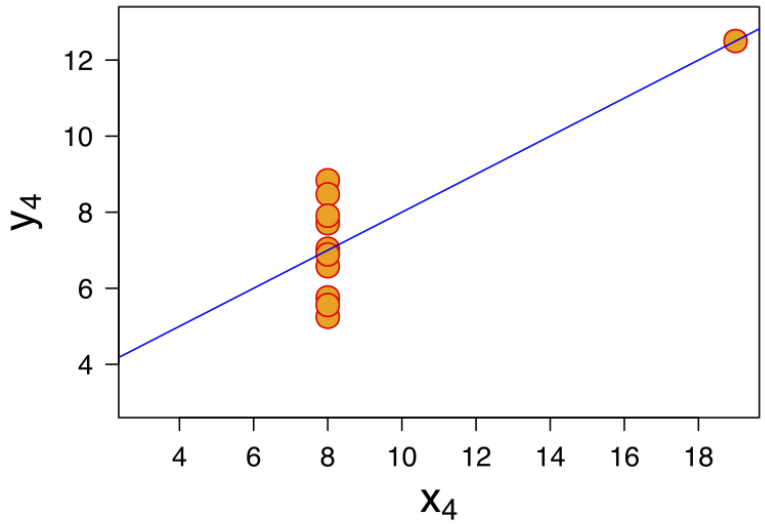
№	1	2	3	4
$\bar{x}$	9	9	9	9
S_x	11	11	11	11
$\bar{y}$	7.5	7.5	7.5	7.5
S_y	4.127	4.127	4.128	4.128
r_{xy}	0.816	0.816	0.816	0.816

Об ограниченности статистик









Точечные оценки

Пусть распределение генеральной совокупности параметрическое:

$$F(x) = F(x, \theta).$$

Статистика $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}\,(X^n)$ — точечная оценка параметра θ.
Какая оценка лучше?

Состоятельность: $\operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta.$

Несмещённость: $\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \theta.$

Асимптотическая несмещённость: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{\theta}_n = \theta.$

Оптимальность: $\mathbb{D}\hat{\theta}_n = \min\limits_{\hat{\theta}\,:\,\mathbb{E}\hat{\theta}=\theta} \mathbb{D}\hat{\theta}.$

Робастность: устойчивость $\hat{\theta}_n$ относительно

- отклонений истинного распределения X от модельного семейства
- выбросов, содержащихся в выборке

Метод максимума правдоподобия

Популярный метод получения точечных оценок:

$$\begin{aligned} X &\sim f(x, \theta), \\ X^n &= (X_1, \ldots, X_n), \\ L(X^n, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta), \\ \hat{\theta}_{MLE} &\equiv \operatorname*{argmax}_{\theta} L(X^n, \theta). \end{aligned}$$

Удобно прологарифмировать:

$$\begin{aligned} \log L(X^n, \theta) &= \sum_{i=1}^{n} f(X_i, \theta), \\ \hat{\theta}_{MLE} &\equiv \operatorname*{argmax}_{\theta} \log L(X^n, \theta). \end{aligned}$$

Производные функции правдоподобия

Score function:

$$S(\theta) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta)$$

ОМП — решение score equation:

$$S(\theta) = 0$$

Информация Фишера:

$$I(\theta) \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta)$$

Дисперсия ОМП:

$$\mathbb{D}\hat{\theta}_{MLE} \approx I^{-1}\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)$$

Свойства ОМП

- состоятельность:
$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\theta}_{MLE} = \theta$$
- асимптотическая нормальность: при $n \to \infty$
$$\hat{\theta}_{MLE} \sim N\left(\theta, I^{-1}(\theta)\right)$$
- эффективность: ОМП имеют наименьшую дисперсию среди всех состоятельных оценок
- инвариантность: $g\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)$ — ОМП-оценка для $g\left(\theta\right)$

Интервальные оценки

Доверительный интервал:

$$\mathbf{P}(\theta \in [C_L, C_U]) \geqslant 1 - \alpha,$$

$1 - \alpha$ — уровень доверия,
C_L, C_U — нижний и верхний доверительные пределы.

Неверная интерпретация: неизвестный параметр лежит в пределах построенного доверительного интервала с вероятностью $1 - \alpha$.

Верная интерпретация: при бесконечном повторении процедуры построения доверительного интервала на аналогичных выборках в $100(1 - \alpha)\%$ случаев он будет содержать истинное значение θ.

Для нормального распределения

$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \;\; X^n = (X_1, \ldots, X_n),$

$\bar{X}_n$ — оценка $\mathbb{E}X = \mu$,

ЦПТ: $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow$

$$\mathbf{P}\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X}_n \leqslant \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

доверительный интервал для μ:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

Для ненормальных распределений

ЦПТ: если X^n — выборка из $F(x)$, $F(x)$ не слишком скошено и $n > 30$, то

$$\bar{X}_n \sim\approx N\left(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n}\right) \Rightarrow$$

доверительный интервал для $\mathbb{E}X$:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}} \leqslant \mathbb{E}X \leqslant \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}}\right) \approx 1-\alpha.$$

Если дисперсия неизвестна:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \mathbb{E}X \leqslant \bar{X}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha,$$

$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

Квантили

Непараметрический доверительный интервал для медианы непрерывного распределения.

$$X^n = (X_1, \ldots, X_n), \quad X \sim F(x) \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{P}\big(\operatorname{med} X \in \big[X_{(r)}, X_{(n-r+1)}\big]\big) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=r}^{n-r+1} C_n^i.$$

При $n > 10$ применима нормальная аппроксимация:

$$\mathbf{P}\left(\operatorname{med} X \in \left[X_{\left(\left\lfloor \frac{n-\sqrt{n}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} \right\rfloor\right)}, X_{\left(\left\lceil \frac{n+\sqrt{n}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} \right\rceil\right)}\right]\right) \approx 1-\alpha.$$

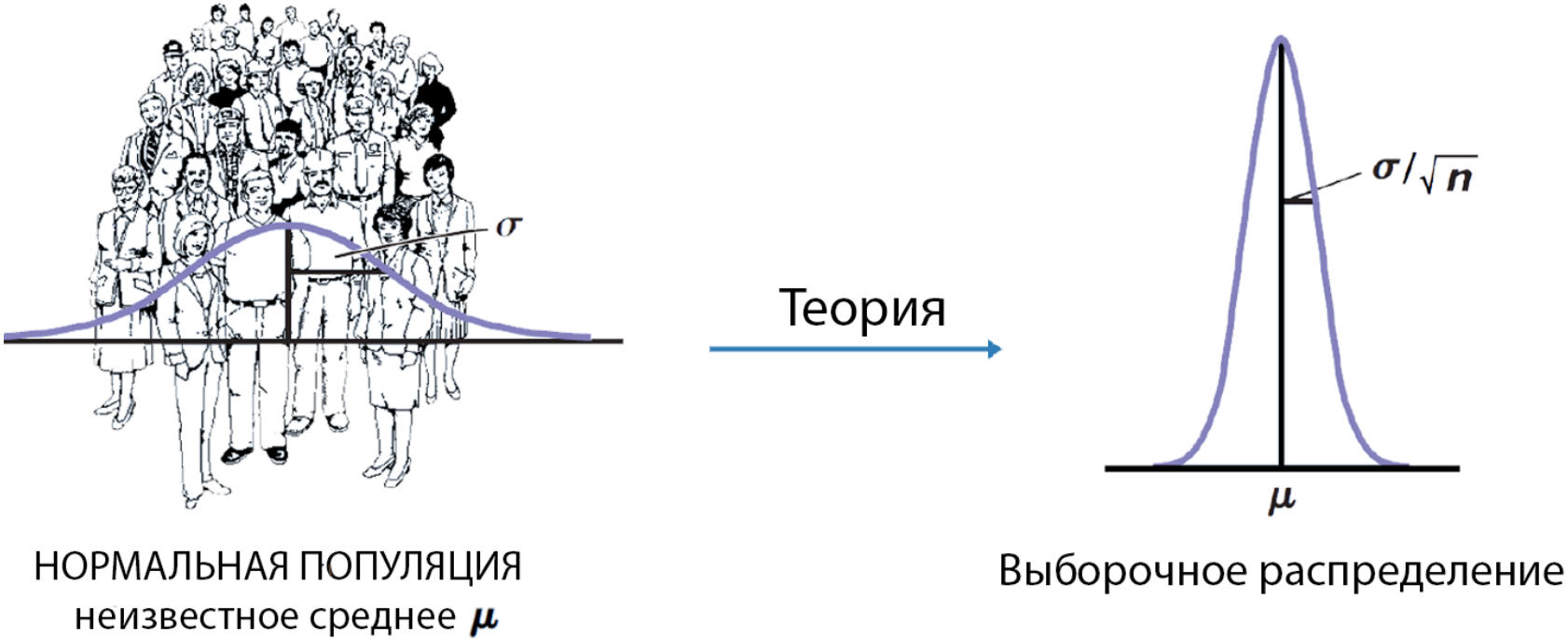
Аналогично строится непараметрический доверительный интервал для любого квантиля $X_\alpha, \alpha \in (0,1)$:

$$\mathbf{P}\big(X_\alpha \in \big[X_{(l)}, X_{(u)}\big]\big) = \sum_{i=l}^{u} C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{n-i}.$$

Построение доверительных интервалов

Как можно оценить $F_{\hat{\theta}_n}(x)$ — выборочное распределение статистики $\hat{\theta}_n$? (Hesterberg, 2005):

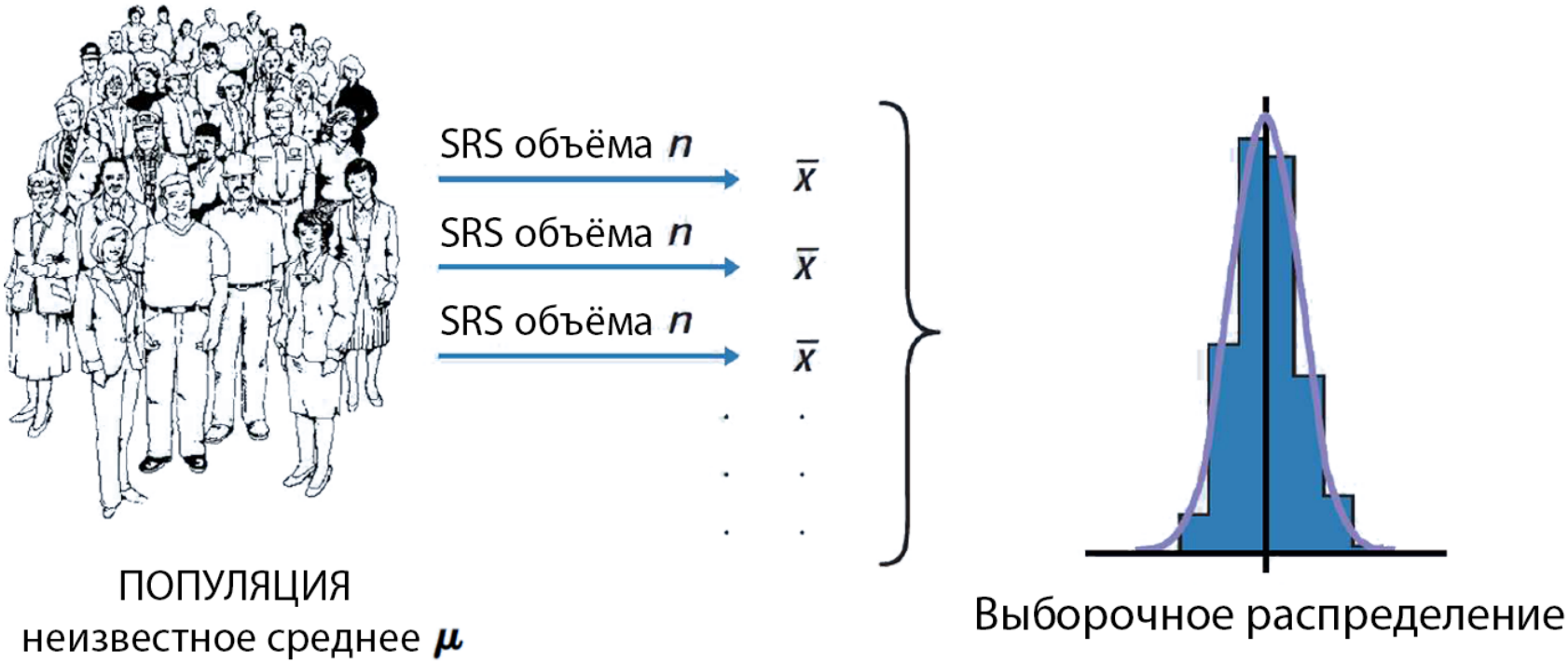
- параметрический метод:



Сделать предположение, что X распределена по закону $F_X(x)$, при выполнении которого закон распределения $\hat{\theta}_n$ известен.

Построение доверительных интервалов

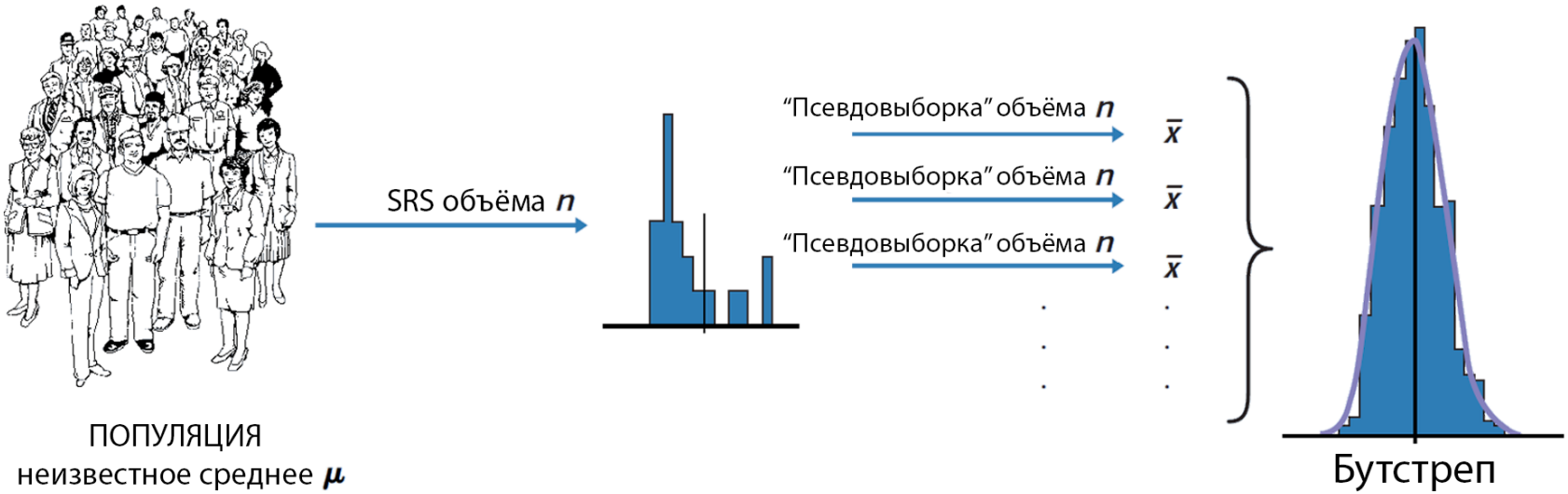
- наивный метод:



Извлечь из генеральной совокупности N выборок объёма n и оценить выборочное распределение $\hat{\theta}_n$ эмпирическим.

Построение доверительных интервалов

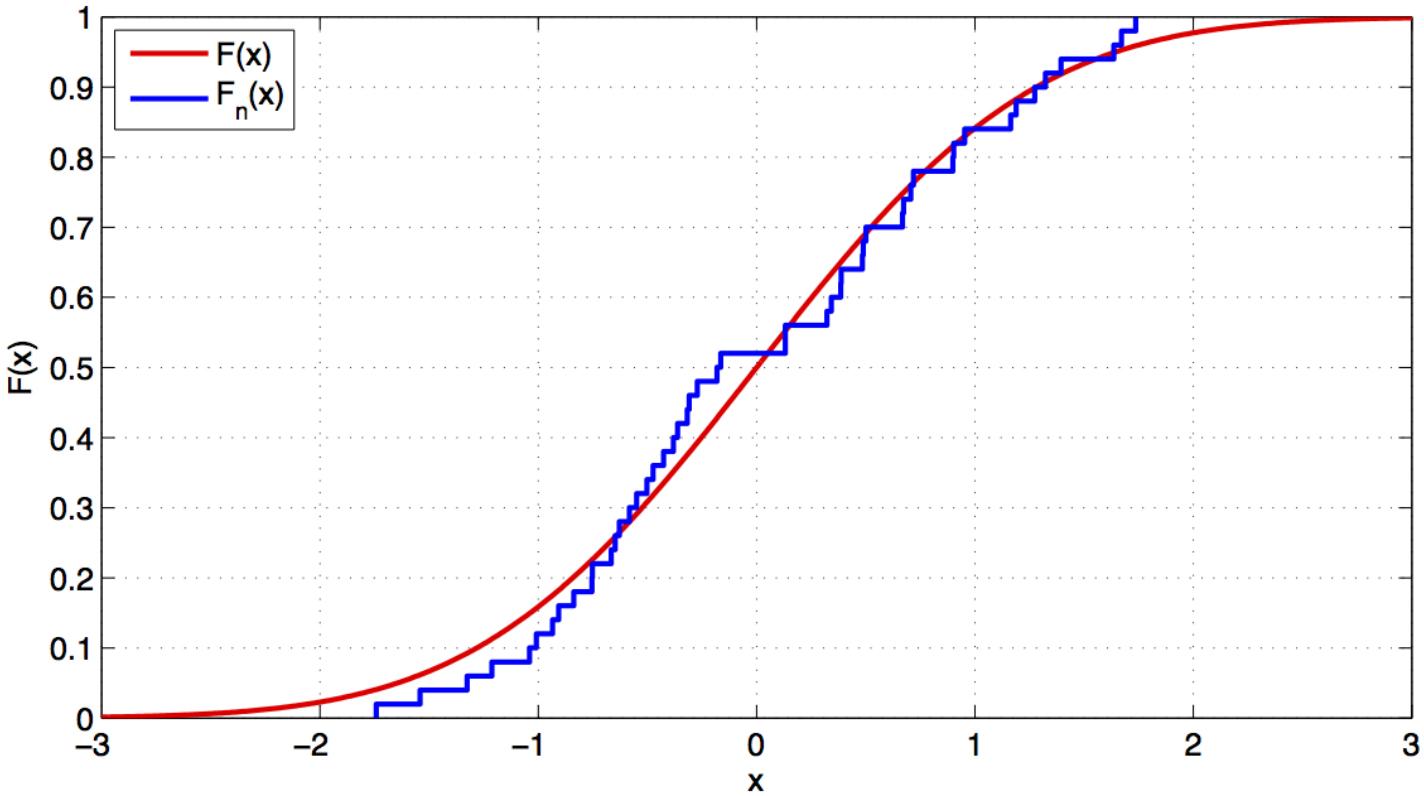
- бутстреп:



Сгенерировать N «псевдовыборок» объёма n и оценить выборочное распределение $\hat{\theta}_n$ «псевдоэмпирическим».

Бутстреп

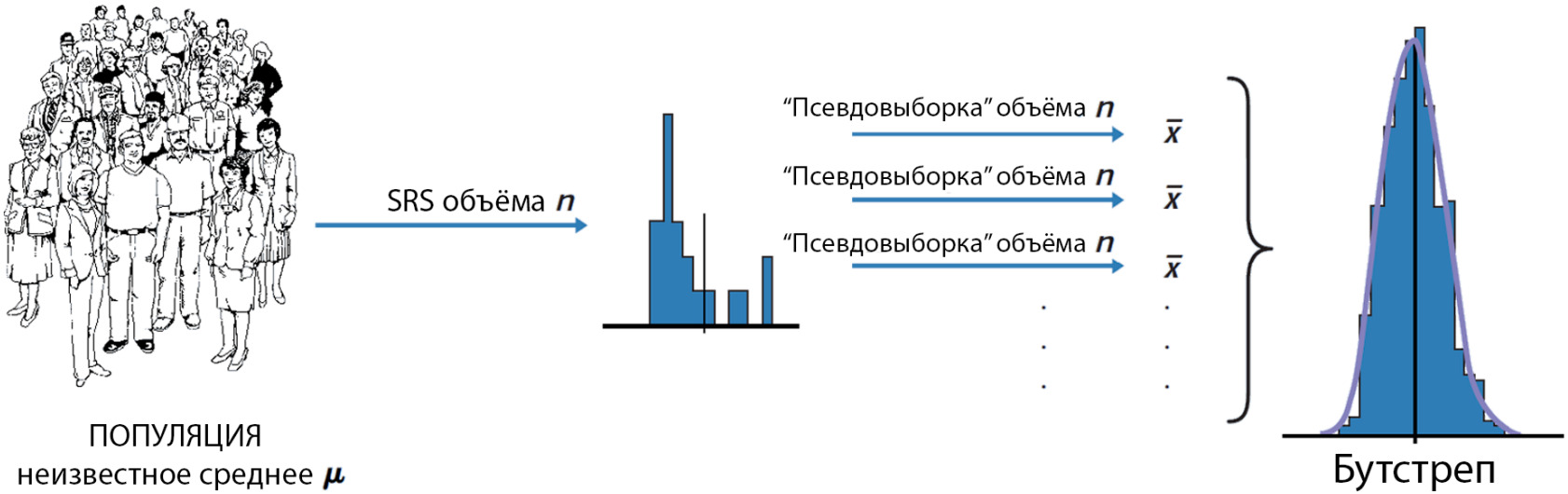
Извлечение выборок из генеральной совокупности — сэмплирование из неизвестного распределения $F_X(x)$.
Лучшая оценка $F_X(x)$, которая у нас есть — $F_{X^n}(x)$:



Сэмплировать из неё — это то же самое, что делать из X^n выборки с возвращением объёма n.

Бутстреп-распределение

$X^{1*}, \ldots, X^{N*}$ — бутстреп-псевдовыборки из X^n объёма n,
$\hat{\theta}_n^{1*}, \ldots, \hat{\theta}_n^{N*}$ — значения статистики на них,
$F^{boot}_{\hat{\theta}_n}(x)$ — бутстреп-распределение $\hat{\theta}_n$ — эмпирическая функция распределения, построенная по значениям статистики на псевдовыборках.



По $F^{boot}_{\hat{\theta}_n}(x)$ можно строить доверительные интервалы для θ!

Доверительные интервалы

- Посчитаем S_n^{boot} — выборочное стандартное отклонение $\hat{\theta}_n$ на псевдовыборках;

$$\mathbf{P}\left(\hat{\theta}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n^{boot} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n^{boot}\right) \approx 1-\alpha.$$

  Это стьюдентизированный бутстреп.

- Возьмём выборочные квантили бутстреп-распределения:

$$\mathbf{P}\left(\left(F_{\hat{\theta}_n}^{boot}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \theta \leqslant \left(F_{\hat{\theta}_n}^{boot}\right)^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \approx 1-\alpha.$$

  Это базовый бутстреп.

Доверительные интервалы

- Слегка изменим наивный бутстреп:

$$\mathbf{P}\left(\left(F^{boot}_{\hat\theta_n}\right)^{-1}(\alpha_1) \leqslant \theta \leqslant \left(F^{boot}_{\hat\theta_n}\right)^{-1}(\alpha_2)\right) \approx 1-\alpha,$$

$$\alpha_1 = \Phi\left(\hat z_0 + \frac{\hat z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat a\left(\hat z_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)}\right),$$

$$\alpha_2 = \Phi\left(\hat z_0 + \frac{\hat z_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat a\left(\hat z_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}\right),$$

$$\hat z_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\hat\theta^{i*}_n < \hat\theta_n\right]\right),$$

$\hat a$ не поместится на этом слайде.

Это несмещённый ускоренный бутстреп.

Свойства бутстрепа

- асимптотическая состоятельность
- простота использования даже для самых сложных статистик
- плохо работает для статистик, значение которых зависит от небольшого числа элементов выборки

Проверка гипотез

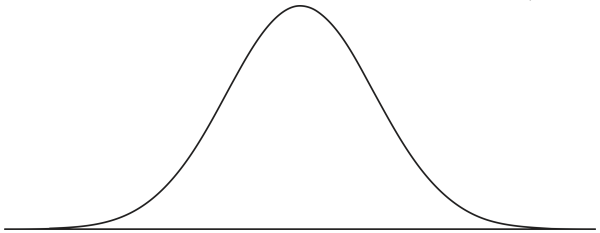
выборка: $X^n = (X_1, \ldots, X_n),\ X \sim \mathbf{P} \in \Omega$

нулевая гипотеза: $H_0\colon\ \mathbf{P} \in \omega,\ \ \omega \in \Omega$

альтернатива: $H_1\colon\ \mathbf{P} \notin \omega$

статистика: $T(X^n),\ \ T(X^n) \sim F(x)$ при $\mathbf{P} \in \omega$

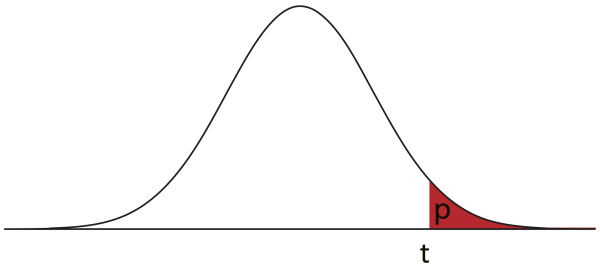
$T(X^n) \not\sim F(x)$ при $\mathbf{P} \notin \omega$



реализация выборки: $x^n = (x_1, \ldots, x_n)$

реализация статистики: $t = T(x^n)$

достигаемый уровень значимости: $p(x^n)$ — вероятность при H_0 получить $T(X^n) = t$ или ещё более экстремальное



$$p(x^n) = \mathbf{P}(T \geqslant t \,|H_0)$$

Гипотеза отвергается при $p(x^n) \leqslant \alpha,\ \ \alpha$ — уровень значимости

Проверка гипотез

Достигаемый уровень значимости

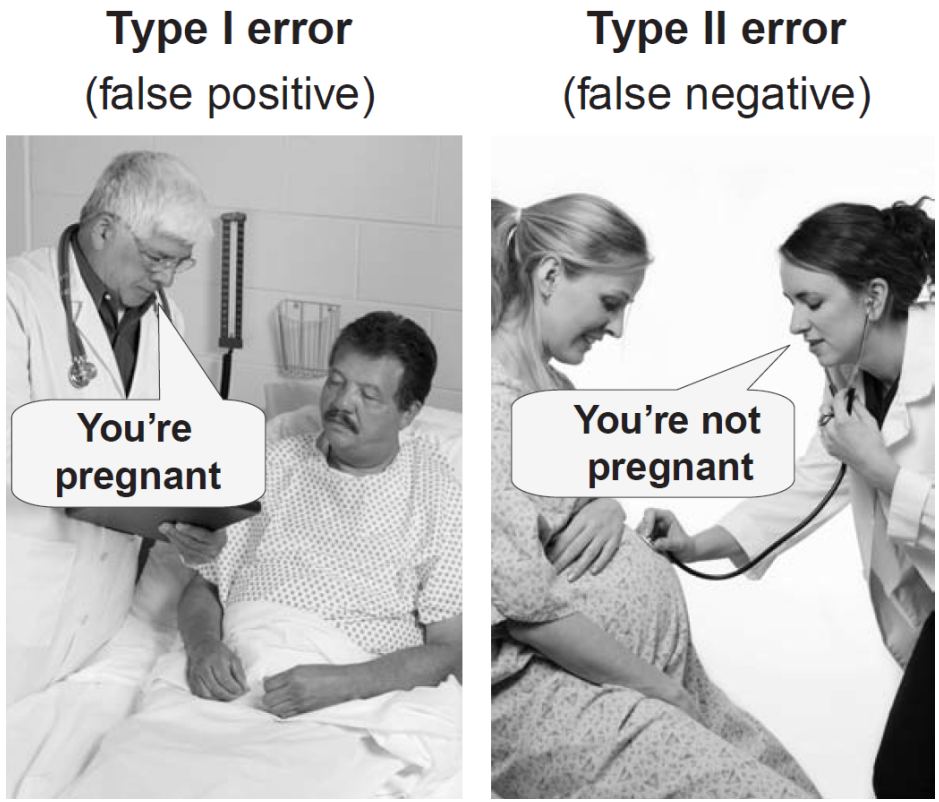
$$p = \mathbf{P}(T \geqslant t \,|H_0\,) \neq \mathbf{P}(H_0)$$

Пример: утверждается, что осьминог предсказывает результаты матчей с участием сборной Германии на чемпионате мира по футболу 2010 года, выбирая кормушку с флагом страны-победителя. По результатам 13 испытаний ему удаётся верно угадать результаты 11 матчей. Применяя подходящий статистический критерий, мы получаем $p \approx 0.0112$.

0.0112 — не вероятность того, что осьминог выбирает кормушку наугад! Эта вероятность равна единице.

Ошибки I и II рода

	H_0 верна	H_0 неверна
H_0 принимается	H_0 верно принята	Ошибка второго рода (False negative)
H_0 отвергается	Ошибка первого рода (False positive)	H_0 верно отвергнута



Ошибки I и II рода

Задача проверки гипотез несимметрична относительно пары (H_0, H_1): вероятность ошибки первого рода ограничивается сверху величиной α, а второго рода — минимизируется путём выбора критерия.

Корректный критерий: $\mathbf{P}(p\,(T) \leqslant \alpha\,|H_0\,) \leqslant \alpha \forall\, \mathbf{P} \in \Omega$.
Мощность: $\text{pow} = \mathbf{P}(p\,(T) \leqslant \alpha\,|H_1\,)\,.$
Состоятельный критерий: $\text{pow} \to 1$ для всех альтернатив H_1 при $n \to \infty$.
T_1 — **равномерно наиболее мощный** критерий, если $\forall T_2$

$$\mathbf{P}(p\,(T_1) \leqslant \alpha\,|H_1\,) \geqslant \mathbf{P}(p\,(T_2) \leqslant \alpha\,|H_1\,) \quad \forall H_1 \neq H_0,$$
$$\mathbf{P}(p\,(T_1) \leqslant \alpha\,|H_0\,) = \mathbf{P}(p\,(T_2) \leqslant \alpha\,|H_0\,)\,,$$

причём хотя бы для одной H_1 неравенство строгое.

Интерпретация результата

Если величина p достаточно мала, то данные свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.
Если величина p недостаточно мала, то данные не свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.

При помощи инструмента проверки гипотез нельзя доказать справедливость нулевой гипотезы!
Absence of evidence $\not\Rightarrow$ evidence of absence.

Статистическая и практическая значимость

Вероятность отвергнуть нулевую гипотезу зависит не только от того, насколько она отличается от истины, но и от размера выборки.
По мере увеличения n нулевая гипотеза может сначала приниматься, но потом выявятся более тонкие несоответствия выборки гипотезе H_0, и она будет отвергнута.

При любой проверке гипотез нужно оценивать **размер эффекта** — степень отличия нулевой гипотезы отличается от истины, и оценивать его практическую значимость.

Статистическая и практическая значимость

- (Lee et al, 2010): за три года женщины, упражнявшиеся не меньше часа в день, набрали значимо меньше веса, чем женщины, упражнявшиеся меньше 20 минут в день ($p < 0.001$). Разница в набранном весе составила 150 г. Практическая значимость такого эффекта сомнительна. Подробности: `http://youtu.be/oqDZO-mfN4Q`.
- (Ellis, 2010, гл. 2): в 2002 году клинические испытания гормонального препарата Премарин, облегчающего симптомы менопаузы, были досрочно прерваны. Было обнаружено, что его приём ведёт к значимому увеличению риска развития рака груди на 0.08%, риска инсульта на 0.08% и инфаркта на 0.07%. Формально эффект крайне мал, но с учётом численности населения он превращается в тысячи дополнительных смертей.
- (Kirk, 1996): если при испытании гипотетического лекарства, позволяющего замедлить прогресс ослабления интеллекта больных Альцгеймером, оказывается, что разница в IQ контрольной и тестовой групп составляет 13 пунктов, возможно, изучение лекарства стоит продолжить, даже если эта разница статистически незначима.

Другие особенности

- Выбранная статистика может отражать не всю информацию, содержащуюся в выборке. Пример:

$$H_0 : X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad H_1 : H_0 \text{ неверна;}$$

$$T\left(X^n\right) = g_1.$$

  Все симметричные распределения будут признаны нормальными!
- Гипотезы вида $H_0 : \theta = \theta_0$ можно проверять при помощи доверительных интервалов для θ:
  - если θ_0 не попадает в $100\,(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для θ, то H_0 отвергается на уровне значимости α;
  - p-value — максимальное α, при котором θ_0 попадает в соответствующий доверительный интервал.

Shaken, not stirred

Джеймс Бонд говорит, что предпочитает мартини взболтанным, но не смешанным. Проведём слепой тест: n раз предложим ему пару напитков и выясним, какой из двух он предпочитает.

Выборка: бинарный вектор длины n, 1 — Джеймс Бонд предпочёт взболтанный, 0 — смешанный.

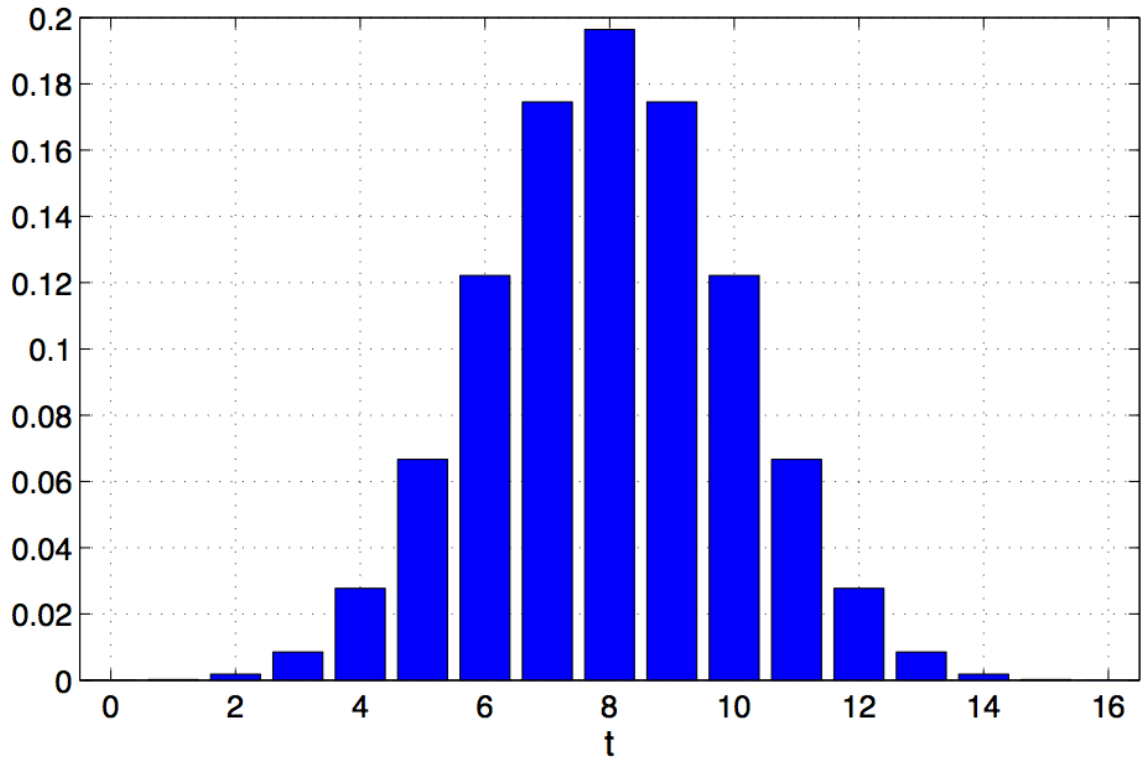
Нулевая гипотеза: Джеймс Бонд не различает два вида мартини, т. е., выбирает наугад.

Статистика T — число единиц в выборке.

Нулевое распределение

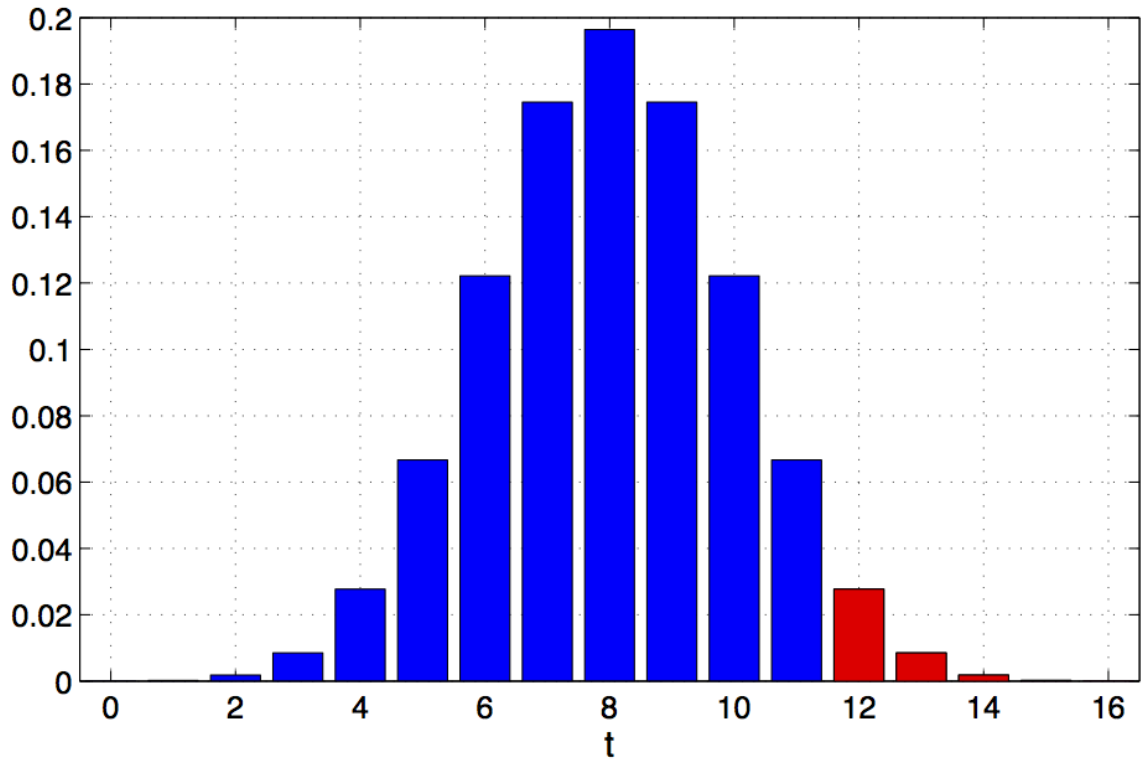
Если нулевая гипотеза справедлива и Джеймс Бонд не различает два вида мартини, то равновероятны все выборки длины n из нулей и единиц.

Пусть $n = 16$, тогда существует $2^{16} = 65536$ равновероятных варианта.
Статистика T принимает значения от 0 до 16:



Односторонняя альтернатива

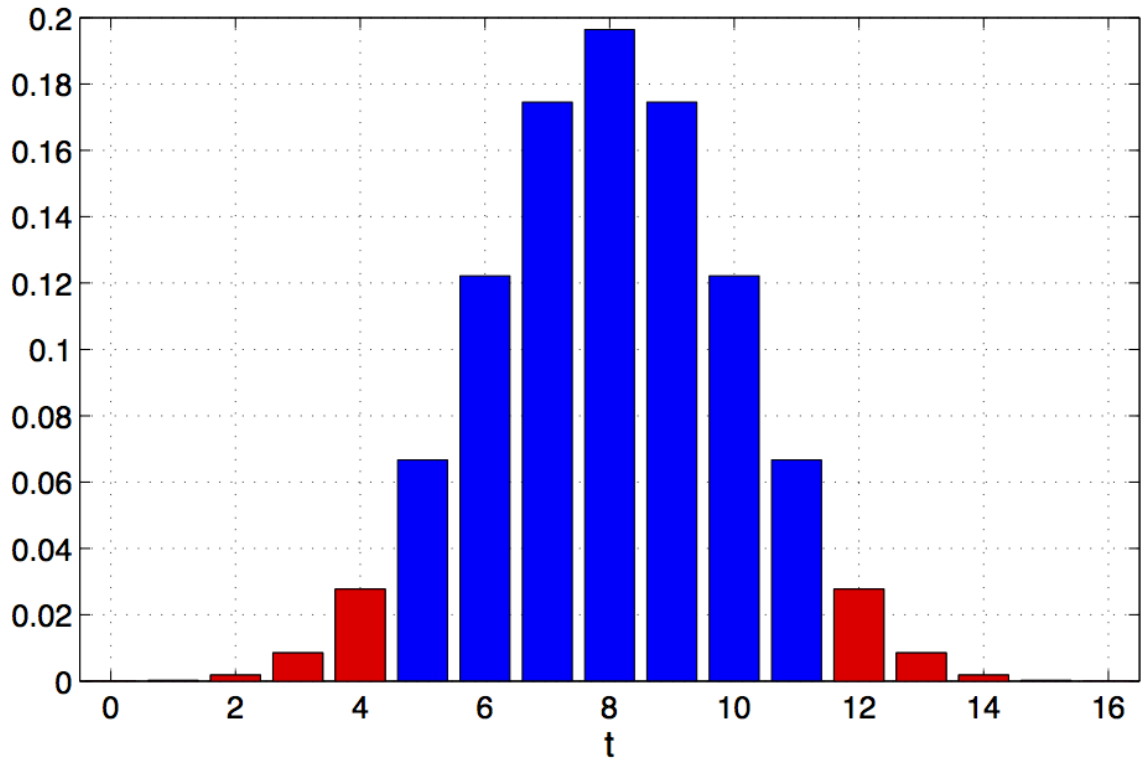
H_1: Джеймс Бонд предпочитает взболтанный мартини.
При справедливости такой альтернативы более вероятны большие значения T (т.е., большие T свидетельствуют против H_0 в пользу H_1).
Вероятность того, что Джеймс Бонд предпочтёт взболтанный мартини в 12 или более случаях из 16 при справедливости H_0, равна $\frac{2517}{65536} \approx 0.0384$.



0.0384 — достигаемый уровень значимости при реализации $t = 12$.

Двусторонняя альтернатива

H_1: Джеймс Бонд предпочитает какой-то определённый вид мартини. При справедливости такой альтернативы и большие, и маленькие значения T свидетельствуют против H_0 в пользу H_1).
Вероятность того, что Джеймс Бонд предпочтёт взболтанный мартини в $\geqslant 12$ случаях из 16 при справедливости H_0, равна $\frac{5034}{65536} \approx 0.0768$.



0.0768 — достигаемый уровень значимости при реализации $t = 12$.

Достигаемый уровень значимости

Чем ниже достигаемый уровень значимости, тем сильнее данные свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.

0.0384 — вероятность реализации $t \geqslant 12$ при условии, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. Джеймс Бонд выбирает мартини наугад.

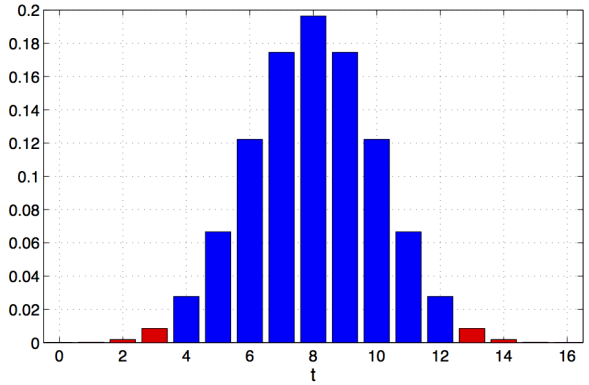
Ещё раз: это не вероятность справедливости нулевой гипотезы!

Пример: пусть Джеймс Бонд выбирает взболтанный мартини в 51% случаев (ненаблюдаемая вероятность).

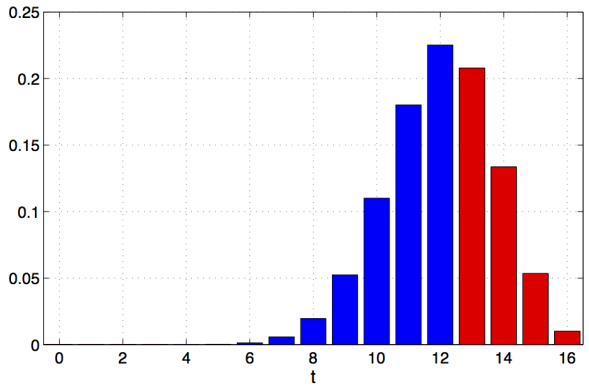
Пусть по итогам 100 испытаний взболтанный мартини был выбран 49 раз. Достигаемый уровень значимости против односторонней альтернативы — $p \approx 0.6178$. Нулевая гипотеза не отвергается, при этом сказать, что она верна, было бы ошибкой — Джеймс Бонд выбирает смешанный и взболтанный мартини не с одинаковыми вероятностями!

Мощность

Проверяя нулевую гипотезу против двусторонней альтернативы, мы отвергаем H_0 при $t \geqslant 13$ или $t \leqslant 3$, что обеспечивает достигаемый уровень значимости $p = 0.0213 \leqslant \alpha = 0.05$.



Пусть Джеймс Бонд выбирает взболтанный мартини в 75% случаев.



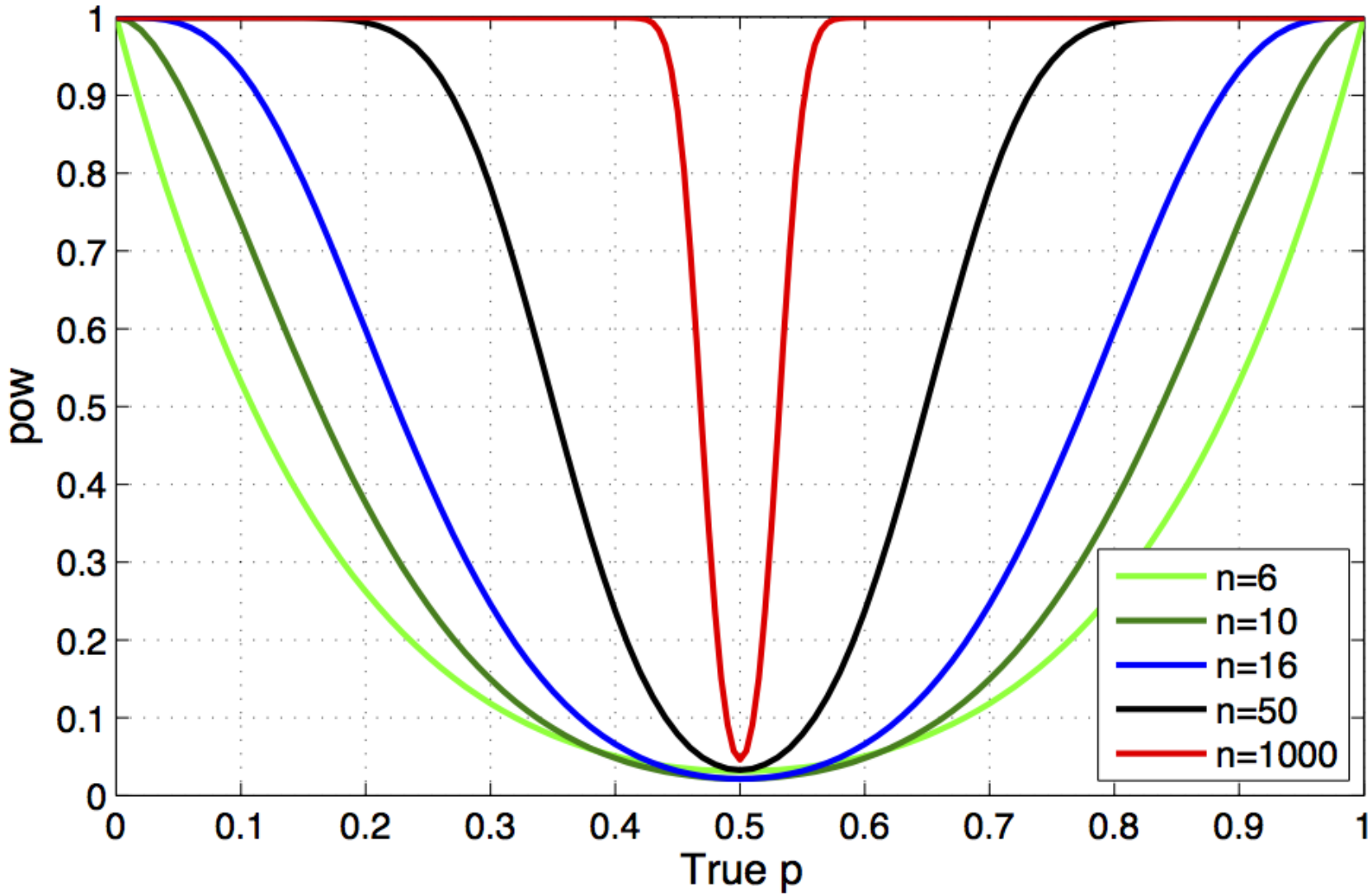
$\mathrm{pow} \approx 0.6202$, т. е., при многократном повторении эксперимента гипотеза будет отклонена только в 62% случаев.

Мощность

Мощность критерия зависит от следующих факторов:

- размер выборки
- размер отклонения от нулевой гипотезы
- чувствительность статистики критерия
- тип альтернативы

Мощность



Размер выборки

Особенности прикладной задачи: 1 порция мартини содержит 55 мл джина и 15 мл вермута — суммарно около 25 мл спирта. Смертельная доза алкоголя при массе тела 80 кг составляет от 320 до 960 мл спирта в зависимости от толерантности (от 13 до 38 мартини).

Обеспечение требуемой мощности: размеры выборки подбирается так, чтобы при размере отклонения от нулевой гипотезы не меньше заданного (например, вероятность выбора взболтанного мартини не меньше 0.75) мощность была не меньше заданной.

Литература

Справочники по статистике:

- Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.
- Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.

Вводные учебники по статистике:

- Good P.I., Hardin J.W. *Common Errors in Statistics (and How to Avoid Them)*, 2003.
- Reinhart A. *Statistics Done Wrong. The woefully complete guide*, `http://www.statisticsdonewrong.com/`

R:

- видео с Тревором Хасти: `http://youtu.be/jwBgGS_4RQA`
- краткий справочник функций: `http://cran.r-project.org/doc/contrib/Short-refcard.pdf`
- выучить R в R: `http://swirlstats.com`
- курс по R: `https://www.coursera.org/course/rprog`

Литература

Правдоподобие:

- Chihara L., Hesterberg T. *Mathematical Statistics with Resampling and R*, 2011, глава 6.
- Pawitan, Y. *In all likelihood: statistical modelling and inference using likelihood*, 2001.

Бутстреп:

- Hesterberg T., Monaghan S., Moore D.S., Clipson A., Epstein R. *Bootstrap methods and permutation tests*. In Introduction to the Practice of Statistics, 2005. `http://statweb.stanford.edu/~tibs/stat315a/Supplements/bootstrap.pdf`
- Efron B., Tibshirani R. *An Introduction to the Bootstrap*, 1993.

Проверка гипотез:

- Good P.I., Hardin J.W. *Common Errors in Statistics (and How to Avoid Them)*, 2003, глава 2.

Литература

Anscombe F.J. (1973). *Graphs in Statistical Analysis*. American Statistician, 27(1): 17–21.

Begg I.M., Anas A., Farinacci S. (1992). *Dissociation of processes in belief: Source recollection, statement familiarity, and the illusion of truth*. Journal of Experimental Psychology: General, 121(4), 446–458.

Ellis P.D. *The Essential Guide to Effect Sizes: Statistical Power, Meta-Analysis, and the Interpretation of Research Results*, 2010.

Huff D. *How To Lie With Statistics*, 1954.

Kirk R.E. (1996). *Practical Significance: A Concept Whose Time Has Come*. Educational and Psychological Measurement, 56(5), 746–759.

Lee I.-M., Djoussè L., Sesso H.D., Wang L., Buring J.E. (2010). *Physical Activity and Weight Gain Prevention*. JAMA: the Journal of the American Medical Association, 303(12), 1173–1179.

Marriott, F. H. C. *The Interpretation of Multiple Observations*, 1974.