

Байесовский выбор моделей: обоснованность и отбор признаков в линейной и логистической регрессии

Александр Адуенко

13е октября 2021

Содержание предыдущих лекций

- Формула Байеса: $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$;
- Формула полной вероятности: $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$;
- Определение априорных вероятностей и selection bias;
- (Множественное) тестирование гипотез
- Экспоненциальное семейство. Достаточные статистики.
- Naive Bayes. Связь целевой функции и вероятностной модели.
- Линейная регрессия: классический подход, связь МНК и ML-оценки, регуляризации и MAP-оценки для вектора параметров \mathbf{w} .
- Свойство сопряженности априорного распределения правдоподобию.
- Прогноз для одиночной модели:

$$p(\mathbf{y}_{\text{test}}|\mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) = \int p(\mathbf{y}_{\text{test}}|\mathbf{w}, \mathbf{X}_{\text{test}})p(\mathbf{w}|\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}})d\mathbf{w}.$$

- Связь апостериорной вероятности модели и обоснованности

$$p(M_i|\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) \propto p(M_i)p_i(\mathbf{y}_{\text{train}}|\mathbf{X}_{\text{train}}).$$

- Прогноз для многих моделей: $p(\mathbf{y}_{\text{test}}|\mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) =$

$$\sum_{k=1}^K p(M_k|\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}})p_k(\mathbf{y}_{\text{test}}|\mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}).$$

Пример выбора модели

a – applicant, r – reviewer

$$a, r = \begin{cases} 0, \text{ нет PhD,} \\ 1, \text{ PhD.} \end{cases}$$

d – decision

$$d = \begin{cases} 1, \text{ принять,} \\ 0, \text{ отвергнуть.} \end{cases}$$

$r = 0$	$d = 0$	$d = 1$
$a = 0$	9	0
$a = 1$	132	19

$r = 1$	$d = 0$	$d = 1$
$a = 0$	97	6
$a = 1$	52	11

Случаи:

- 1 $p(d|a, r) = p(d)$
- 2 $p(d|a, r) = p(d|a)$
- 3 $p(d|a, r) = p(d|r)$
- 4 $p(d|a, r) = p(d|a, r)$

$$1) p(d|a, r) = p(d)$$

Поэтому $p(d|w) = \text{Be}(w)$. **Prior** : $p(w) = U[0, 1]$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, w)p(w)dw = \int_0^1 C_9^0(1-w)^9 C_{103}^{97}w^6(1-w)^{97} C_{151}^{132}w^{19}(1-w)^{132} C_{63}^{52}w^{11}(1-w)^{52}dw = 2.8 \cdot 10^{-51} CCCC$$

$$2) p(d|a, r) = p(d|a)$$

Поэтому $p(d|a=0) = \text{Be}(w_1)$, $p(d|a=1) = \text{Be}(w_2)$.

Prior : $p(w_1) = U[0, 1]$, $p(w_2) = U[0, 1]$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, w_1, w_2)p(w_1)p(w_2)dw_1dw_2 = \int_0^1 \int_0^1 C_9^0(1-w_1)^9 C_{103}^{97}w_1^6(1-w_1)^{97} C_{151}^{132}w_2^{19}(1-w_2)^{132} C_{63}^{52}w_2^{11}(1-w_2)^{52}dw_1dw_2 = 4.7 \cdot 10^{-51} CCCC$$

$$3) p(d|a, r) = p(d|r)$$

Поэтому $p(d|r = 0) = \text{Be}(w_1)$, $p(d|r = 1) = \text{Be}(w_2)$.

Prior : $p(w_1) = U[0, 1]$, $p(w_2) = U[0, 1]$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = 0.27 \cdot 10^{-51} CCCCC$$

$$4) p(d|a, r) = p(d|a, r)$$

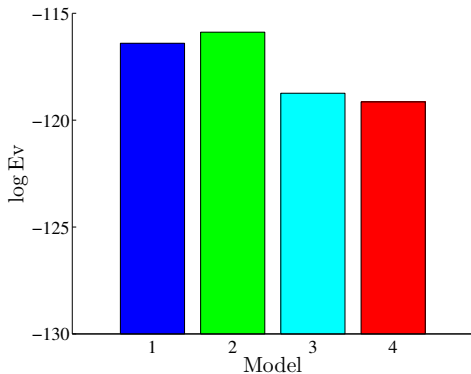
Поэтому $p(d|a = 0, r = 0) = \text{Be}(w_1)$, $p(d|a = 0, r = 1) = \text{Be}(w_2)$,

$p(d|a = 1, r = 0) = \text{Be}(w_3)$, $p(d|a = 1, r = 1) = \text{Be}(w_4)$.

Prior : $p(w_1) = U[0, 1]$, $p(w_2) = U[0, 1]$,

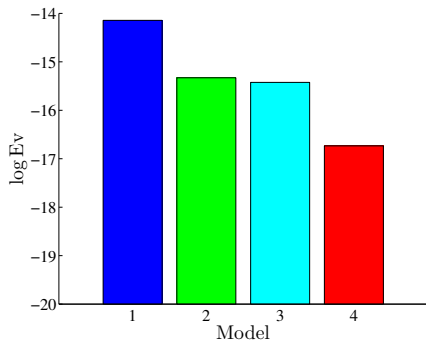
$p(w_3) = U[0, 1]$, $p(w_4) = U[0, 1]$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = 0.18 \cdot 10^{-51} CCCCC$$

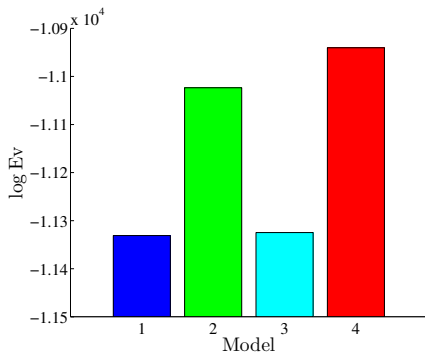


Сравнение обоснованностей, 326 объектов в выборке

Выбор модели: зависимость от размера выборки



Сравнение обоснованностей, 33
объекта в выборке



Сравнение обоснованностей, 32600
объектов в выборке

$$\text{Evidence : } p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}) = \int p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w})p_i(\mathbf{w})d\mathbf{w}$$

$$p_i(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{y}) = \frac{p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w})p_i(\mathbf{w})}{p(\mathbf{y}|\mathbf{X})}.$$

Предположения:

- w одномерный
- Априорное распределение $p_i(w)$ плоское с шириной Δw_{prior}
- Апостериорное распределение $p_i(w|\mathbf{X}, \mathbf{y})$ сконцентрировано вокруг w_{MP} с шириной Δw_{post}

Тогда: $\log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}) \approx \log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, w_{MP}) + \log \left(\frac{\Delta w_{\text{post}}}{\Delta w_{\text{prior}}} \right)$.

Для M -мерного \mathbf{w} : $\log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}) \approx \log p_i(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}_{MP}) + M \log \left(\frac{\Delta w_{\text{post}}}{\Delta w_{\text{prior}}} \right)$.

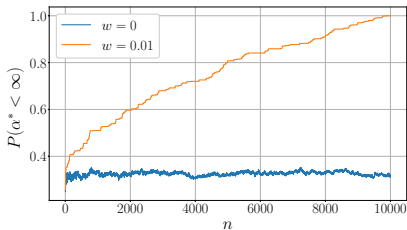
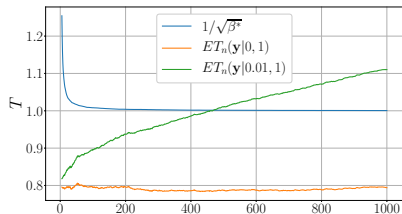
Пример оптимизации evidence

$$y_i = w + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\varepsilon|0, \beta^{-1})$$

$$y_1|w, \dots, y_n|w \sim \mathcal{N}(y_i|w, \beta^{-1}), w \sim \mathcal{N}(w|0, \alpha^{-1}).$$

$$p(\mathbf{y}|\alpha, \beta) = \frac{\beta^{n/2} \alpha^{1/2}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{n\beta + \alpha}} \exp \left(-\frac{1}{2} \beta \sum_{i=1}^n y_i^2 + \frac{\beta^2 (\sum_{i=1}^n y_i)^2}{2(n\beta + \alpha)} \right).$$

$$(\alpha^*, \beta^*) = \arg \max_{\alpha, \beta} p(\mathbf{y}|\alpha, \beta).$$



$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{n^2 \beta^*}{\beta^* (\sum_{i=1}^n y_i)^2 - n}, & \underbrace{\frac{|\sum_{i=1}^n y_i|}{\sqrt{n}}}_{T_n(\mathbf{y}|w, \beta)} > \frac{1}{\sqrt{\beta^*}}, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \frac{1}{\beta^*} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\mathbf{y}})^2}{n-1}.$$

Обоснованность для линейной регрессии

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}|\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1}), \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$$

Совместное правдоподобие: $p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) = p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\mathbf{A})$.

Обоснованность:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) = \int p(\mathbf{y}, \mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2)d\mathbf{w} = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \sigma^2)p(\mathbf{w}|\mathbf{A})d\mathbf{w}.$$

$$\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{y}|\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I} + \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}^\top)$$

Поэтому:

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \sigma^2) \propto -\frac{1}{2} \log \det(\sigma^2\mathbf{I} + \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}^\top) - \frac{1}{2}\mathbf{y}^\top (\sigma^2\mathbf{I} + \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}^\top)^{-1}\mathbf{y}.$$

Пример

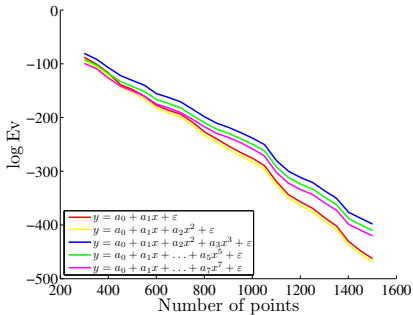
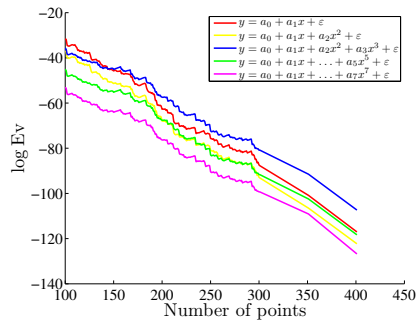
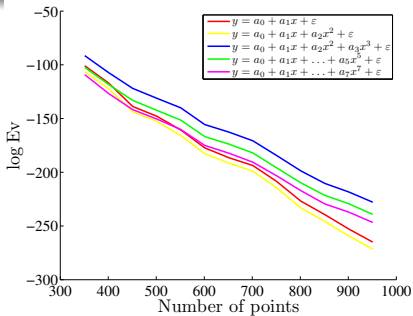
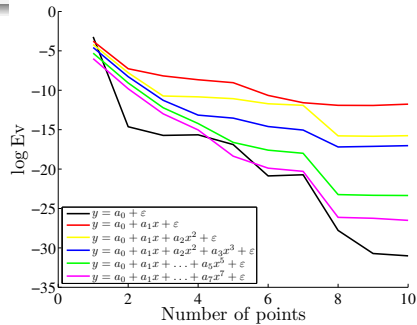
$y_i = \sin x_i + \varepsilon_i$, x_i равномерно выбрано на $[-\pi/2, \pi/2]$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}|\mathbf{0}, \alpha^{-1}\mathbf{I})$$

Значения параметров: $\alpha = 0.01$, $\sigma^2 = 0.1$.

Признаки: $1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^k, \dots$

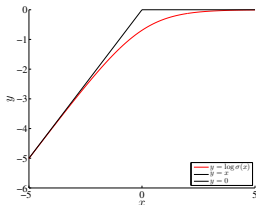
Пример: сравнение моделей



Байесовская логистическая регрессия

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – признаковая матрица, а $\mathbf{y} \in \{\pm 1\}^m$ – метки класса.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}), \text{ где } p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^T \mathbf{x}_j).$$



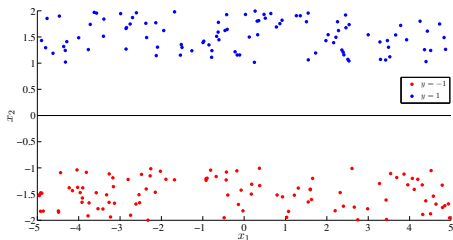
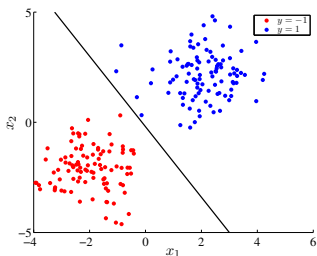
$$p(y_j | \mathbf{w}, \mathbf{x}_j) = \sigma(y_j \mathbf{w}^T \mathbf{x}_j) = \frac{1}{1 + \exp(-y_j \mathbf{w}^T \mathbf{x}_j)}.$$

Вопрос 1: как выбрать $p(\mathbf{w} | \mathbf{A})$?

Вопрос 2: Пусть $p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1})$, $\mathbf{A} = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha})$

Что происходит, когда $\alpha_i \rightarrow \infty$?

Примеры неоднозначности выбора разделительной прямой.



Вопрос 3: чему равна \mathbf{w}_{ML} для выборок на рис. выше?

Обоснованность для логистической регрессии

Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – признаковая матрица, а $\mathbf{y} \in \{\pm 1\}^m$ – метки класса.

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}), \text{ где } p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^T \mathbf{x}_j).$$

Идея: выбрать модель с максимальной обоснованностью.

Вопрос 1: чем отличаются разные модели байесовской логистической регрессии, описанные выше?

Вычисление обоснованности.

Пусть далее $p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1})$, $\mathbf{A} = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha})$.

$$\text{Тогда } \mathbf{A}^* = \arg \max_{\mathbf{A}} p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = \arg \max_{\mathbf{A}} \int \underbrace{p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A})}_{Q(\mathbf{w})} d\mathbf{w}.$$

Проблема: интеграл аналитически не вычисляется.

Аппроксимация Лапласа

$$\log Q(\mathbf{w}) \approx \log Q(\mathbf{w}_{\text{MAP}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})^T \overbrace{\nabla \nabla \log Q(\mathbf{w}_{\text{MAP}})}^{-\mathbf{H}^{-1}} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}}).$$
$$\mathbf{A}^* = \arg \max_{\mathbf{A}} \left(Q(\mathbf{w}_{\text{MAP}}) \int e^{-\frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})^T \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})} d\mathbf{w} \right).$$

Вопрос 2: Как определяется \mathbf{w}_{MAP} ?

Вариационные нижние оценки

Определение. $g(x, \xi)$ вариационная нижняя оценка для $f(x) \iff$

1 $f(x) \geq g(x, \xi) \forall x, \xi$

2 $f(\xi) = g(\xi, \xi)$.

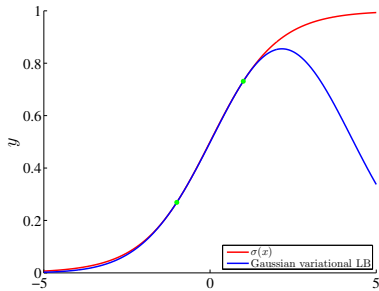
Вместо $f(x) \rightarrow \max_x$ рассмотрим $g(x, \xi) \rightarrow \max_{x, \xi}$

1 $\xi^n = \arg \max_{\xi} g(x^{n-1}, \xi)$

2 $x^n = \arg \max_x g(x, \xi^n)$

VLB для сигмоидной функции

$$\sigma(x) \geq \sigma(\xi) \exp \left(-\frac{1}{4\xi} (2\sigma(\xi) - 1)(x^2 - \xi^2) + \frac{x - \xi}{2} \right).$$



Вопрос: в чем преимущество использования VLB при максимизации обоснованности в логистической регрессии?

LB для обоснованности в логистической регрессии

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j) \frac{\sqrt{\det \mathbf{A}}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A} \mathbf{w}} \geq \text{VLB}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{A}) =$$

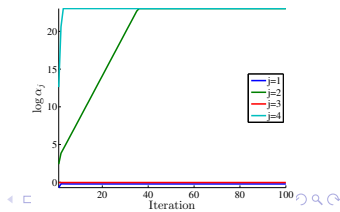
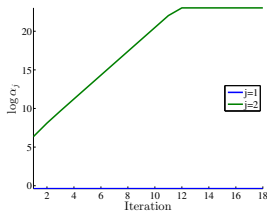
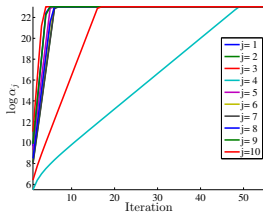
$$\frac{\sqrt{\det \mathbf{A}}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A} \mathbf{w}} \prod_{j=1}^m \sigma(\xi_j) \exp \left(-\frac{2\sigma(\xi_j)-1}{4\xi_j} (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^\top \mathbf{w} - \xi_j^2) + \frac{y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j - \xi_j}{2} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{\det \mathbf{A}}}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^m \sigma(\xi_j) e^{\frac{2\sigma(\xi_j)-1}{4\xi_j} \xi_j^2 - \frac{\xi_j}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A}' \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top \mathbf{v}}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \sum_{j=1}^m \frac{2\sigma(\xi_j)-1}{2\xi_j} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^\top, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{x}_j.$$

Тогда $p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) \geq \text{LB}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}) = \int \text{VLB}(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{A}) d\mathbf{w} \rightarrow \max_{\mathbf{A}, \boldsymbol{\xi}}$.

Иллюстрация отбора признаков в логистической регрессии



Апостериорное распределение в логистической регрессии

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}), \text{ где } p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j).$$

$$p(\mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{A}) = \frac{p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A})}{p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A})} = \frac{\prod_{j=1}^m \sigma(y_j \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_j) \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{0}, \mathbf{A}^{-1})}{p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{A})}.$$

$$p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) = \int p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{w}, \mathbf{X}_{\text{test}}) p(\mathbf{w} | \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) d\mathbf{w}.$$

Вопрос 1: Как определить \mathbf{w}_{MAP} ? Единственное ли решение?

$$q(\mathbf{w}) = -\log p(\mathbf{y}, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = -\log p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) - \log p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \mathbf{w}) =$$
$$q(\mathbf{w}_{\text{MAP}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}})^\top \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}}) + O(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{MAP}}\|^3), \text{ где}$$
$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{A} + \mathbf{X}^\top \mathbf{R} \mathbf{X}, \text{ где } \mathbf{R} = \text{diag}(\sigma(\mathbf{w}_{\text{MAP}}^\top \mathbf{x}_j) \sigma(-\mathbf{w}_{\text{MAP}}^\top \mathbf{x}_j)).$$

Нормальная аппроксимация: $p(\mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{y}, \mathbf{A}) \approx \mathcal{N}(\mathbf{w} | \mathbf{w}_{\text{MAP}}, \mathbf{H}^{-1})$.

Пример. Пусть $n = 1$, $\mathbf{w}_{\text{MAP}} = 1$.

Вопрос 2: Что можно сказать про принадлежность объектов с $x = 0; 1; -1; 5; -5$ к классу 1?

Вопрос 3: Как результат зависит от неопределенности h^{-1} ? Что происходит при $h \rightarrow 0$ и при $h \rightarrow \infty$?

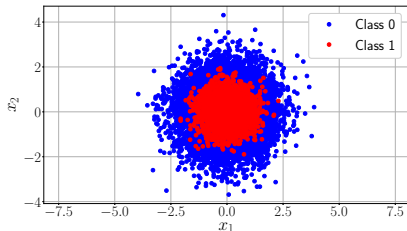
Нелинейная разделяющая поверхность

$$p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{X}_{\text{test}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) = \int p(\mathbf{y}_{\text{test}} | \mathbf{w}, \mathbf{X}_{\text{test}}) p(\mathbf{w} | \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{y}_{\text{train}}) d\mathbf{w}.$$

Прогноз вероятности класса 1 в зависимости от неопределенности h^{-1}

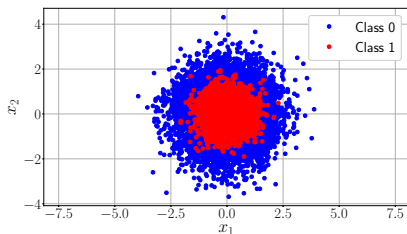
	$x = 5$	$x = 1$	$x = 0$	$x = -1$	$x = -5$
$h = \infty$	0.0067	0.269	0.5	0.731	0.9933
$h = 1$	0.169	0.301	0.5	0.699	0.831
$h = 0$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

Вопрос 1: как учесть в модели, что классы не сбалансированы?



Вопрос 2: что делать, если разделяющая поверхность нелинейна?

Выбросы и пропуски в данных



Вопрос 1: что делать, если разделяющая поверхность нелинейна?

Идея:

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = [K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), i = 1, \dots, m].$$

Вопрос 2: Чему соответствует отбор признаков при замене

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = [K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), i = 1, \dots, m]?$$

Вопрос 3: Что если значения части признаков не заданы или некорректны? Что происходит при замене на среднее / медиану?

Исходная модель: $p(y, \mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{A}) = p(y | \mathbf{X}, \mathbf{w})p(\mathbf{w} | \mathbf{A})$.

Пусть $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{Z}$, $\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{0}$, где \mathbf{Z} – матрица значений пропусков.

Новая модель: $p(y, \mathbf{w}, \mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) = p(y | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, \mathbf{w})p(\mathbf{w} | \mathbf{A})p(\mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}})$.

$$p(\mathbf{w} | y, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) \propto p(y, \mathbf{w} | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) = \int p(y, \mathbf{w}, \mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{A}) d\mathbf{Z} =$$

$$\int p(y | \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{Z}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w} | \mathbf{A}) \underbrace{p(\mathbf{Z} | \tilde{\mathbf{X}})}_{\text{вс}} d\mathbf{Z}.$$

- 1 Bishop, Christopher M. "Pattern recognition and machine learning". Springer, New York (2006). Pp. 113-120, 161-171.
- 2 MacKay, David JC. Bayesian methods for adaptive models. Diss. California Institute of Technology, 1992.
- 3 MacKay, David JC. "The evidence framework applied to classification networks." *Neural computation* 4.5 (1992): 720-736.
- 4 Gelman, Andrew, et al. Bayesian data analysis, 3rd edition. Chapman and Hall/CRC, 2013.
- 5 Chen, Ming-Hui, and Joseph G. Ibrahim. "Conjugate priors for generalized linear models." *Statistica Sinica* (2003): 461-476.
- 6 Chen, Ming-Hui, and Joseph G. Ibrahim. "Conjugate priors for generalized linear models." *Statistica Sinica* (2003): 461-476.
- 7 Fahrmeir, Ludwig, and Heinz Kaufmann. "Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models." *The Annals of Statistics* (1985): 342-368.
- 8 Baghishani, Hossein, and Mohsen Mohammadzadeh. "Asymptotic normality of posterior distributions for generalized linear mixed models." *Journal of Multivariate Analysis* 111 (2012): 66-77.