Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Кафедра Математических Методов Прогнозирования

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 517 ГРУППЫ

«Системы точек с вырожденными матрицами попарных расстояний»

Выполнил:

студент 5 курса 517 группы

Фигурнов Михаил Викторович

Научный руководитель:

д.ф-м.н., профессор

Дьяконов Александр Геннадьевич

Москва, 2013

Содержание

1 Введение

Данная работа посвящена изучению свойства k-сингулярности конечной системы точек, впервые введённого в статье А.Г. Дьяконова [2]. Система q попарно различных точек пространства $\mathbb{R}^m$ называется k-сингулярной, если размерность пространства значений полиномов (с поэлементным умножением) степени не выше k от столбцов матрицы попарных l_1-расстояний меньше q.

Ясно, что 1-сингулярность эквивалентна вырожденности матрицы попарных l_1-расстояний. Поскольку пространство полиномов степени 1 вложено в пространство полиномов степени не выше k, из k-сингулярности следует 1-сингулярность, то есть вырожденность матрицы попарных l_1-расстояний.

Отметим важный критерий из статьи [2], который связывает понятие k-сингулярности и теорию интерполяции функций, заданных на конечном множестве точек. Система точек не является k-сингулярной тогда и только тогда, когда любая функция на этой системе точек может быть представлена в виде суммы функций от k переменных.

Свойство k-сингулярности возникает и при изучении модели алгоритмов вычисления оценок (АВО) [5, 6]. Большую роль при изучении данной модели играет понятие корректности семейства, то есть возможности получить произвольную матрицу оценок, а, следовательно, произвольную классификацию объектов. В статье [3] показано, что можно построить систему точек, линейные комбинации столбцов матрицы l_1-расстояний которой полностью описывают матрицы оценок линейных комбинаций модели АВО. Таким образом, корректность множества полиномов степени не выше k над моделью АВО (или алгебраического замыкания степени k) сводится к исследованию k-сингулярности соответствующей системы точек.

В статье [2] А.Г. Дьяконов доказал метрический критерий 1-сингулярности: 1-сингулярность эквивалентна линейной зависимости системы функций $\rho(\tilde{s}, \tilde{s}_i)$, где вместо второго аргумента подставляются точки системы, а ρ — метрика Хэмминга или l_1-метрика. Затем П.А. Карпович в статье [7] обобщил критерий на случай k-сингулярности. Оказывается, в этом случае нужно брать систему функций $\rho^k(\tilde{s}, \tilde{s}_i)$.

Возникает вопрос, верен ли критерий k-сингулярности для других метрик, например, для суммы l_1-метрики и метрики Хэмминга. Цель данной работы — исследование возможности обобщения упомянутого результата на другие метрики.

Сначала будет приведено авторское доказательство критерия k-сингулярности для метрики Хэмминга и l_1-метрики. С использованием предложенной методики будет рассмотрен случай, когда ρ — метрика Хэмминга или l_1-метрика, в которых значения близости по различным координатам оцениваются с разным весом. Мы будем называть такие метрики обобщёнными. Кроме того, будет рассмотрена сумма обобщённой метрики Хэмминга и обобщённой l_1-метрики. Затем мы перейдём к исследованию конуса разрезных полуметрик CUT^q [1]. Полуметрика принадлежит CUT^q тогда и только тогда, когда она изометрично вложима в l_1. В конце работы приведены исследования, связанные с устранением неточностей в доказательстве одной из теорем в статье [2].

1.1 Определения и обозначения

Будем следовать в обозначениях работе [2]. Приведём для удобства эти обозначения. Размерность векторов и матриц будут ясны из контекста.

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел, через $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, через $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

Надстрочной тильдой обозначаются вектор-столбцы. У вектора $\tilde{x}$ будем обозначать через $(\tilde{x})_i$ его i-ю координату.

Введём удобные обозначения:

- $\tilde{1} = (1, \ldots, 1)^T$ — вектор, состоящий из единиц;
- $\tilde{0} = (0, \ldots, 0)^T$ — вектор, состоящий из нулей;
- $\tilde{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ — бинарный вектор, i-я координата которого равна единице, остальные координаты равны нулю.

Определение 1. Линейным замыканием $L(X)$ множества векторов одинаковой размерности X называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов:

$$L(X) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \tilde{x}_i |\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},\, x_1, \ldots, x_n \in X, n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Пространство, ортогональное к пространству $L(X)$, будем обозначать через $L^{\perp}(X)$.

Определение 2. Адамаровым произведением $\tilde{a} \circ \tilde{b}$ векторов $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ называется поэлементное произведение векторов:

$$\tilde{a} \circ \tilde{b} = \big((\tilde{a})_1 \cdot (\tilde{b})_1, \ldots, (\tilde{a})_n \cdot (\tilde{b})_n \big)^T$$

Операцию «$\circ$» будем называть адамаровым умножением.

Определение 3. Алгебраическим замыканием k-й степени $U^k(X)$ множества векторов одинаковой размерности X называется множество полиномов степени не выше k над множеством векторов с нулевым свободным членом относительно операции адамарова умножения:

$$U^k(X) = L(\{\tilde{x}_1 \circ \cdots \circ \tilde{x}_s |\, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_s \in X, s \leq k\})$$

Замечание. Очевидно, что $U^1(H) = L(H)$

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами. Обозначим через E матрицу, состоящую из единиц.

Определение 4. Пусть $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H = [\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_m]$, то есть $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_m$ — n-мерные вектор-столбцы матрицы. Обозначим

$$\begin{aligned} L(H) &\equiv L(\{\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_m\}), \\ U^k(H) &\equiv U^k(\{\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_m\}). \end{aligned}$$

Введём обозначение, позволяющее компактно записывать логические условия.

Определение 5. Индикаторной (характеристической) функцией предиката x называется функция

$$[x] = \begin{cases} 1, & x = \text{истина}, \\ 0, & x = \text{ложь}. \end{cases}$$

Определим ключевые для данной работы метрики, см. [1].

Определение 6. *Метрикой Хэмминга* называется функция $\rho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{m} [(\tilde{x})_i \neq (\tilde{y})_i].$$

Замечание. Формула записана в немного необычном виде. Это нужно для обобщения метрики в дальнейшем.

Определение 7. l_1-*метрикой* называется функция $\rho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{m} |(\tilde{x})_i - (\tilde{y})_i|.$$

В данной работе мы будем рассматривать систему попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^{q}$ пространства $\mathbb{R}^m$, $q \geq 2$. Будем считать, что для каждой координаты существует две точки с различными значениями этой координаты. Если это не так, то отбросим соответствующую координату и понизим m. Также будем предполагать, что множество S упорядочено (порядок не имеет значения).

Обозначим через $\{a_{t,0}, a_{t,1}, \ldots, a_{t,p(t)}\}$ упорядоченное множество значений t-й координаты:

$$\{(\tilde{s}_i)_t |\, i \in \{1, 2, \ldots, q\}\} = \{a_{t,0}, a_{t,1}, \ldots, a_{t,p(t)}\}, a_{t,0} < a_{t,1} < \cdots < a_{t,p(t)}.$$

В силу оговоренного выше, $p(t) \geq 1$, $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть $T^t = \|\theta_{ij}\|_{q \times (p(t)+1)}$ — бинарная матрица, в которой

$$\theta_{i,j} = [(\tilde{s}_i)_t = a_{t,j-1}],\ i \in \{1, 2, \ldots, q\}, j \in \{1, 2, \ldots, p(t) + 1\}.$$

Здесь было использовано определение 5 индикаторной функции.

Определение 8. $T_S = [T^1 \ldots T^m]$ (конкатенация по горизонтали матриц $T^1, \ldots, T^m$).

Введём обозначение: $U^k[S] \equiv U^k(T_S)$.

Определение 9. Столбцы матрицы T_S называются характеристическими векторами системы точек S.

Определение 10 (Reid, Sun [8]). Характеристической матрицей H_S системы точек S называется матрица

$$H_S = T_S \cdot T_S^T,$$

умножение матричное.

Определение 11. P_S — матрица попарных расстояний Хэмминга системы точек S.

Определение 12. P'_S — матрица попарных l_1-расстояний системы точек S.

Введём ключевое для данной работы определение:

Определение 13 (Дьяконов [2]). Система точек S называется k-сингулярной, если размерность пространства $U^k[S]$ меньше q.

1.2 Обзор литературы

Приведём обзор результатов, полученных по данной теме ранее в работе [2].

Доказана простая лемма, связывающая характеристическую матрицу и матрицу попарных расстояний Хэмминга:

Лемма 1 (Дьяконов [2]). $P_S = mE - H_S$.

Доказана лемма, из которой следует, что матрица попарных расстояний Хэмминга вырождена тогда и только тогда, когда вырождена матрица попарных l_1-расстояний:

Лемма 2 (Дьяконов [2]). *Для функций*

$$F_k(x) = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(x - j + 1),\ G_k(x) = x^k$$

и системы попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^{q} \subseteq \mathbb{R}^m, q \geq 2$, *при* $k \leq m$ *справедливы равенства*

$$U^k(P_S) = L(F_k(H_S)) = U^k(T_S) = L(G_k(H'_S)) = U^k(P'_S).$$

Учитывая определения k-сингулярности, получаем из этой леммы, что 1-сингулярность системы точек соответствует вырожденности матрицы попарных l_1-расстояний. Также можно сказать, что k-сингулярность формализует «полноту» пространства полиномов степени не выше k над столбцами матрицы попарных l_1-расстояний: система из q точек является k-сингулярной, если размерность пространства таких полиномов меньше q.

Доказана теорема, показывающая, что по системе точек строится новая система, которая 1-сингулярна тогда и только тогда, когда k-сингулярна исходная:

Теорема 1 (Дьяконов [2]). *Пусть $k \leq m$ и z — биективное отображение множества $\{1, 2, \ldots, C_m^k\}$ на множество $\{\{i_1, \ldots, i_k\} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\}$. Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда является 1-сингулярной система точек $D = \{\tilde{d}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^{C_m^k}$ такая, что для всех $t \in \{1, 2, \ldots, C_m^k\}$ справедливо*

$$(\tilde{d}_i)_t = (\tilde{d}_j)_t \Leftrightarrow \forall r \in z(t)\ (\tilde{s}_i)_r = (\tilde{s}_j)_r.$$

Получен критерий k-сингулярности, связывающий k-сингулярность с представимостью функции многих переменных, заданной на конечном множестве точек $\mathbb{R}^m$, в виде суммы функций k переменных:

Теорема 2 (Дьяконов [2]). *Система точек S не является k-сингулярной при $k \leq m$ тогда и только тогда, когда любая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на точках системы S может быть представлена в виде конечной суммы функций, каждая из которых зависит от k переменных.*

Также получен геометрический критерий k-сингулярности: система точек не является k-сингулярной тогда и только тогда, когда при любом её разбиении на две непересекающиеся подсистемы они разделимы при помощи гиперплоскости с предварительным действием элемента некоторой группы преобразований пространства.

Доказан метрический критерий 1-сингулярности:

Теорема 3 (Дьяконов [2]). *Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор*

$(c_1,\ldots,c_q)$ *такой, что для всех* $\tilde{s}\in\mathbb{R}^m$ *справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{q} c_i\rho(\tilde{s},\tilde{s}_i)=0, \tag{1}$$

где ρ *— метрика Хэмминга или* l_1*-метрика.*

Также получен основной критерий k-сингулярности: система точек k-сингулярна тогда и только тогда, когда содержит непустой носитель суммы размеченных параллелепипедов (это обобщение понятия «размеченный прямоугольник»).

В работе [7] П.А. Карпович обобщил метрический критерий 1-сингулярности на случай k-сингулярности. Оказывается, что для этого достаточно заменить условие (1) на

$$\sum_{i=1}^{q} c_i\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_i)=0.$$

2 Результаты

2.1 Метрический критерий k-сингулярности

В данном разделе приведено авторское доказательство метрического критерия k-сингулярности, впервые полученного П.А. Карповичем в [7].

Лемма 3. *Для системы попарно различных точек* $S=\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q\subseteq\mathbb{R}^m, q\geq 2$*, справедливы равенства*

$$U^k[S]=U^k(P_S)=U^k(P'_S).$$

Доказательство. При $k\leq m$ данная лемма является следствием леммы 2. При $k>m$ утверждение очевидно, поскольку $U^m[S]=U^m(P_S)=U^m(P'_S)=\mathbb{R}^m$ (все точки в системе S попарно различны). □

Лемма 4. *Для системы попарно различных точек* $S=\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q\subseteq\mathbb{R}^m, q\geq 2$*, при* $k\leq m$ *справедливы равенства*

$$U^k[S]=L(\{\tilde{t}_1\circ\cdots\circ\tilde{t}_k|\tilde{t}_i\in T^{z(i)}, z(i)\neq z(j) \text{ при } i\neq j,\ \forall i,j\in\{1,\ldots,k\}\}). \tag{2}$$

Доказательство. По определению, $U^k[S] \equiv L(\{\tilde{t}_1 \circ \cdots \circ \tilde{t}_n | \tilde{t}_i \in T_S \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, n \leq k\})$, поэтому вложение $\supseteq$ в (2) очевидно.

Докажем вложение $\subseteq$. В силу линейности достаточно доказать его для мономов из $U^k[S]$. Пусть $\tilde{0} \neq \tilde{t} \in U^k[S]$ — моном, то есть $\tilde{t} = \tilde{t}_1 \circ \cdots \circ \tilde{t}_n, \tilde{t}_i \in T^{z(i)}, n \leq k$. Если $z(i) = z(j), i \neq j$, то $\tilde{t}_i = \tilde{t}_j$, поскольку $\tilde{t} \neq \tilde{0}$ по предположению, а различные столбцы $T^{z(i)}$ соответствуют различным классам эквивалентности, то есть их произведение равно нулевому вектору. Таким образом, можно потребовать, чтобы $z(i) \neq z(j)$ при $i \neq j$.

Пусть $n < k$. Поскольку сумма столбцов любой подматрицы T^i равна $\tilde{1}$, $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ \forall i \in \{1, \ldots, m\} \ \tilde{x} = \sum_{\tilde{t}' \in T^i} \tilde{x} \circ \tilde{t}'$. Обозначим элементы множества $\{\{1, 2, \ldots, k\} \setminus \{z(1), \ldots, z(n)\}\}$, занумерованные в любом порядке, через $z'(1), \ldots, z'(k-n)$. Получим:

$$\tilde{t} = \sum_{\tilde{t}'_1 \in T^{z'(1)}} \sum_{\tilde{t}'_2 \in T^{z'(2)}} \cdots \sum_{\tilde{t}'_{k-n} \in T^{z'(k-n)}} \tilde{t}'_1 \circ \tilde{t}'_2 \circ \cdots \circ \tilde{t}'_{k-n} \circ \tilde{t}_1 \circ \cdots \circ \tilde{t}_n$$

Эта сумма принадлежит линейному замыканию из правой части (2).

□

Определение 14. Функция $f(\tilde{x})$ называется полиномом степени $n = 0, 1, 2, \ldots$, если она представима в виде $f(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \tilde{x}^i$, причём $a_n \neq 0$. Операция возведения в степень поэлементная.

Лемма 5. *Пусть $f(\tilde{x})$ — полином степени $n \geq 1$, $\tilde{y} \neq \tilde{0}$ — бинарный вектор. Тогда $f(\tilde{x} - \tilde{y}) - f(\tilde{x}) = \tilde{y} \circ g(\tilde{x})$, где $g(\tilde{x})$ есть полином степени $(n-1)$.*

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&f(\tilde{x}-\tilde{y})-f(\tilde{x})=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot((\tilde{x}-\tilde{y})^i-\tilde{x}^i)=\\
&=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}^{i-j}-\tilde{x}^i\Big)=\\
&=a_0\cdot(\tilde{1}-\tilde{1})+\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}^{i-j}+\tilde{x}^i-\tilde{x}^i\Big)=\\
&=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}^{i-j}\Big)\overset{(*)}{=}\{\tilde{y}\text{ бинарный вектор}\}=\\
&=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}\Big)=\tilde{y}\circ\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\Big)=\\
&=\tilde{y}\circ g(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

Обозначение $(*)$ будет использовано при доказательстве леммы 7.

$g(\tilde{x})$ — полином степени $(n-1)$, поскольку коэффициент при $\tilde{x}^{n-1}$ равен

$$a_n(-1)^{n-(n-1)}\binom{n}{n-1}=-na_n\neq 0.$$

□

Теорема 4 (метрический критерий k-сингулярности). *Система точек $S=\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1,\ldots,c_q)$ такой, что для всех $\tilde{s}\in\mathbb{R}^m$ справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{q} c_i\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_i)=0, \tag{3}$$

где ρ — метрика Хэмминга или l_1-метрика.

Доказательство. Введём вспомогательные обозначения:

$$\tilde{\rho}^k(\tilde{s},S)=(\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_1),\ldots,\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_q))^T,$$
$$R^k[S]=L(\{\rho^k(\tilde{s},S)|\tilde{s}\in\mathbb{R}^m\}).$$

Необходимость. *Метрика Хэмминга.* Пусть S k-сингулярна, т.е. $\exists\tilde{c}=(c_1,\ldots,c_q)\neq\tilde{0}$: $\tilde{c}\in L^\perp(U^k[S])$. Рассмотрим $\tilde{s}\in S$. $\tilde{\rho}(\tilde{s},S)$ есть столбец P_S, поэтому $\tilde{\rho}^k(\tilde{s},S)\in U^k(P_S)$. В силу леммы 3, $U^k(P_S)\subseteq U^k[S]$. Следовательно, $L^\perp(U^k[S])\subseteq L^\perp(U^k(P_S))$. Таким образом, выполнено (3).

Пусть теперь $\tilde{s} \notin S$. Очевидно, что $(c_1, \ldots, c_q, 0) \in L^{\perp}(U^k[S \cup \{\tilde{s}\}]) \subseteq L^{\perp}(U^k(P_{S\cup\{\tilde{s}\}}))$. Следовательно, выполнено равенство $(c_1, \ldots, c_q, 0)P^k_{S\cup\{\tilde{s}\}} = \tilde{0}$. Рассматривая умножение строки на столбец, соответствующий $\tilde{s}$, получаем требуемое утверждение.

l_1-метрика. Доказывается аналогично случаю метрики Хэмминга при замене матрицы P_S на P'_S.

Достаточность. Нужно доказать, что $L^{\perp}(R^k[S]) \subseteq L^{\perp}(U^k[S])$. Докажем эквивалентное утверждение: $U^k[S] \subseteq R^k[S]$. Пусть $k \leq m$ и $\tilde{0} \neq \tilde{w} = \tilde{w}_1 \circ \cdots \circ \tilde{w}_k \in U^k[S]$, где $\tilde{w}_i \in T^{z(i)}$, $z(i) \neq z(j)$ при $i \neq j$. В силу леммы 4 достаточно показать, что $\tilde{w} \in R^k[S]$.

Поскольку $\tilde{w} \neq \tilde{0}$, выполнено $\tilde{w}_i \neq \tilde{0}, i = 1, \ldots, k$ и $\exists\alpha$: $(\tilde{w}_1)_\alpha \neq 0, \ldots, (\tilde{w}_k)_\alpha \neq 0$. Это означает, что вектор $\tilde{w}$ представим в виде произведения столбцов T_S, соответствующих k координатам точки $\tilde{s}_\alpha$.

Метрика Хэмминга. Пусть $\tilde{s} = \tilde{s}_\alpha, \tilde{s}' = \tilde{s} + \varepsilon\tilde{e}_{z(1)}$, причём ε возьмём таким, что $(\tilde{s}')_{z(1)} \notin \{(\tilde{s}_i)_{z(1)} | i \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Заметим, что

$$\forall\tilde{u} \in \mathbb{R}^m \ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \left(\sum_{i=1}^{m}(\tilde{1} - \tilde{t}_i)\right)^k = \left(m \cdot \tilde{1} - \sum_{i=1}^{m}\tilde{t}_i\right)^k, \tag{4}$$

где $\tilde{t}_i$ — соответствующий столбец матрицы T^i, если координата $(\tilde{u})_i$ встречается среди i-х координат точек S, иначе $\tilde{0}$. Это выражение есть полином степени k от $\sum_{i=1}^m \tilde{t}_i$.

Ясно, что в введённых обозначениях у $\tilde{s}$ и $\tilde{s}'$ будут совпадать все векторы $\tilde{t}_i$, кроме $z(1)$-ого, который у $\tilde{s}'$ будет нулевым. Применим лемму 5 при $\tilde{x} = \sum_{i=1}^m \tilde{t}_i, \tilde{y} = \tilde{t}_{z(1)} \equiv \tilde{w}_1, f(\tilde{x}) = (m\tilde{1} - \tilde{x})^k$. Получим, что $\tilde{\rho}^k(\tilde{s}, S) - \tilde{\rho}^k(\tilde{s}', S) = \tilde{w}_1 \circ h(\tilde{x}) \in R^k[S]$, где $h(\tilde{x})$ — полином степени $(k-1)$.

На следующем шаге возьмём $\tilde{s} = \tilde{w}_1 \circ h(\tilde{x}), \tilde{s}' = \tilde{s} + \varepsilon\tilde{e}_{z(2)}$, ε выберем аналогично. Применяя лемму 5, получим, что $\tilde{w}_1 \circ \tilde{w}_2 \circ h(\tilde{x}) \in R^k[S]$, где $h(\tilde{x})$ есть полином степени $(k-2)$.

Повторим процедуру $(k-2)$ раз для $\tilde{w}_3, \ldots, \tilde{w}_k$. Получим, что $\tilde{w}_1 \circ \cdots \circ \tilde{w}_k \circ h(\tilde{x}) \in R^k[S]$, где $h(\tilde{x})$ — полином 0 степени, то есть ненулевая константа (см. определение 14). Значит, $\tilde{w} \in R^k[S]$.

l_1-метрика. Очевидно, что

$$\forall\tilde{u} \in \mathbb{R}^m \ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\tilde{t}\in T^i}|(\tilde{u})_i - coord(\tilde{t})| \cdot \tilde{t}\right)^k, \tag{5}$$

где $coord(\tilde{t})$ — значение координаты, которой соответствует столбец $\tilde{t}$ матрицы T^i. Таким образом, $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ имеет производную любого порядка везде, кроме конечного числа точек, где выражение под одним из модулей меняет знак.

Распишем производную k порядка по координатам $z(1), \ldots, z(k)$ в точке дифференцируемости:

$$\frac{\partial^k}{\partial u_{z(1)} \partial u_{z(2)} \ldots \partial u_{z(k)}} \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = k! \prod_{i=1}^{k} \sum_{\tilde{t} \in T^{z(i)}} \operatorname{sgn}((\tilde{u})_{z(i)} - coord(\tilde{t})) \cdot \tilde{t}$$

Рассмотрим k-мерный булев куб и сопоставим каждой его точке $x_1, x_2, \ldots, x_k$ точку пространства $\mathbb{R}^m$

$$\tilde{s}_{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \tilde{s}_\alpha + (-1)^{x_1} \varepsilon \tilde{e}_{z(1)} + (-1)^{x_2} \varepsilon \tilde{e}_{z(2)} + \cdots + (-1)^{x_k} \varepsilon \tilde{e}_{z(k)},$$

где $\varepsilon > 0$ — малое число, такое, что внутри «куба» находится лишь точка $\tilde{s}_\alpha$ и во всех точках $\tilde{s}_{x_1, x_2, \ldots, x_k}$ функция $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ дифференцируема. Обозначим производную $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ в точке $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $p(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Докажем, что $p(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R^k[S]$. Для этого возьмём шар A достаточно малого радиуса, содержащий точку[1] $s_{x_1, x_2, \ldots, x_k}$ и не содержащий другие точки системы S. В силу непрерывности отображения $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$, образ шара A при воздействии этим отображением есть замкнутое множество. Его линейное замыкание $L = L(\{\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) \mid \tilde{u} \in A\})$ также будет замкнутым множеством. Но производная $p(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ есть предельная точка L. Осталось вспомнить, что по определению $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) \in R^k[S]$, следовательно, $L \subseteq R^k[S]$.

[1] В доказательстве из курсовой работы шаром накрывались сразу все точки. Но этот вариант не подходит для случая суммы метрик Хэмминга и l_1, поскольку такая метрика не является всюду непрерывной.

Заметим теперь, что $\forall x_2, \ldots, x_k \in B^{k-1}$:

$$
\begin{aligned}
&p(0, x_2, \ldots, x_k) - p(1, x_2, \ldots, x_k) = \\
&= k! \sum_{\tilde{t} \in T^{z(1)}} \Big(\operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(1)} + \varepsilon \tilde{e}_{z(1)} - coord(\tilde{t})\big) - \operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(1)} - \varepsilon \tilde{e}_{z(1)} - coord(\tilde{t})\big)\Big) \cdot \tilde{t} \circ \\
&\circ \prod_{i=2}^{k} \sum_{\tilde{t} \in T^{z(i)}} \operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(i)} + (-1)^{x_i} \varepsilon \tilde{e}_{z(i)} - coord(\tilde{t})\big) \cdot \tilde{t} = \\
&= k! \cdot 2\tilde{w}_1 \circ \prod_{i=2}^{k} \sum_{\tilde{t} \in T^{z(i)}} \operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(i)} + (-1)^{x_i} \varepsilon \tilde{e}_{z(i)} - coord(\tilde{t})\big) \cdot \tilde{t} = \\
&= p_1(x_2, \ldots, x_k)
\end{aligned}
$$

Итак, $p_1(x_2, \ldots, x_k)$ задана на B^{k-1}, причём её значения представимы в виде $\tilde{w}_1 \circ \hat{p}_1(x_2 \ldots x_k)$. Легко убедиться, что $p_1(0, x_3, \ldots, x_k) - p_1(1, x_3, \ldots, x_k) = p_2(x_3, \ldots, x_k) = \tilde{w}_1 \circ \tilde{w}_2 \circ \hat{p}_2(x_3 \ldots x_k)$. Продолжая, получим, что $\tilde{w}_1 \circ \cdots \circ \tilde{w}_k = \tilde{w} \in R^k[S]$.

Опишем теперь построение, позволяющее доказать теорему при $k > m$ для обеих метрик. Пусть $k > m, i \in \{1, \ldots, m\}$. Покажем, что $\tilde{e}_i \in R^k[S]$. Для этого возьмём $\tilde{s}_\alpha = \tilde{s}_i$. Из свойств матрицы T_S и того, что в системе точек S нет двух точек с одинаковыми координатами, вектор $\tilde{e}_i$ равен произведению m столбцов матрицы T_S, соответствующих этой точке. Используя вышеописанную процедуру, убеждаемся, что $\tilde{e}_i \in R^k[S]$. Итак, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m \in R^k[S]$, следовательно, $R^k[S] = \mathbb{R}^q$. Отсюда $\tilde{w} \in R^k[S]$.

□

2.2 Обобщение метрического критерия k-сингулярности

Попробуем обобщить метрический критерий k-сингулярности (теорема 4) на более общий случай. Мотивацией к этому является то, что метрика Хэмминга и l_1-метрика, заданные на q точках, принадлежат разрезному конусу CUT^q [1].

Введём соответствующие определения.

Определение 15. Пусть $\tilde{d} \in \mathbb{R}^m$. Функцию

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i [(\tilde{x})_i \neq (\tilde{y})_i],\ (\tilde{d})_i \geq 0\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

назовём *обобщённой полуметрикой Хэмминга.* Если же $(\tilde{d}_i) > 0\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$, то будем называть её *обощённой метрикой Хэмминга.*

В предыдущем определении использовалось определение 5 (индикаторная функция $[x]$).

Определение 16. Пусть $\tilde{d}' \in \mathbb{R}^m$. Функцию

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{m} (\tilde{d}')_i |(\tilde{x})_i - (\tilde{y})_i|, \ (\tilde{d})_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

назовём *обобщённой l_1-полуметрикой.* Если же $(\tilde{d}_i) > 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$, то будем называть её *обощённой l_1-метрикой.*

Матрицу попарных расстояний обобщённой метрики Хэмминга будем обозначать $P_{S,\tilde{d}}$, обобщённой l_1-метрики — $P'_{S,\tilde{d}'}$.

Покажем, что метрический критерий k-сингулярности обобщается на случай этих двух метрик, а также случай их суммы.

Сначала докажем аналог леммы 3 для обобщённых полуметрик Хэмминга и l_1.

Лемма 6. *Для системы попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subseteq \mathbb{R}^m, q \geq 2$, а также произвольных векторов $\tilde{d}, \tilde{d}' \in \mathbb{R}^m, (\tilde{d})_i \geq 0, (\tilde{d}')_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ справедливы равенства*

$$U^k(P_{S,\tilde{d}}) \subseteq U^k[S] \tag{6}$$

$$U^k(P'_{S,\tilde{d}'}) \subseteq U^k[S] \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим случай обобщённой метрики Хэмминга. В начале раздела 4 работы [4] доказано, что $L(P_{S,\tilde{d}}) = L(H)$, где H — обобщённая характеристическая матрица системы точек. Для неё известно, что $L(H) \subseteq U^1[S]$, поскольку H есть матрица Грама для матрицы T_S, столбцы которой были домножены на неположительные коэффициенты $(\tilde{d})_i$ (если все компоненты $\tilde{d}$ положительны, то $L(H) = U^1[S]$). Из этих двух равенств следует первое утверждение леммы.

Для случая обобщённой l_1-метрики проведём следующее рассуждение. Рассмотрим вместе с исходной системой точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ вспомогательную «отмасштабированную» систему точек $S' = \{\tilde{d}' \circ \tilde{s}\}_{i=1}^q$. У координат, соответствующих ненулевым компонентам $(\tilde{d}')_i$, характеристические векторы не изменились. У координат, соответствующих нулевым компонентам характеристические векторы стали равными $\tilde{1}$, то есть вырожденными. Но $\tilde{1} \in L(T_S)$ как сумма компонент любого из блоков T^i.

Отсюда $L(T_{S'}) \subseteq L(T_S)$. Кроме того, матрица $P'_{S'}$ попарных l_1-расстояний системы точек S' совпадает с матрицей $P'_{S,\tilde{d}'}$. Поэтому $U^k(P'_{S,\tilde{d}'}) = U^k(P'_{S'}) = U^k[S'] \subseteq U^k[S]$, откуда следует второе утверждение леммы. □

Докажем теперь обобщение леммы 5 на случай вектора $\tilde{y}$, компоненты которого принимают два значения: 0 и $b > 0$.

Лемма 7. *Пусть $f(\tilde{x})$ — полином степени $n \geq 1$, $\tilde{u} \neq \tilde{0}$ — бинарный вектор, $\tilde{y} = b \cdot \tilde{u}, b > 0$. Тогда $f(\tilde{x} - \tilde{y}) - f(\tilde{x}) = \tilde{u} \circ g(\tilde{x})$, где $g(\tilde{x})$ есть полином степени $(n-1)$.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично лемме 5 до равенства, обозначенного (*). Часть доказательства после этого равенства заменяется на следующее:

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \Big(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} b^{i-j} \cdot \tilde{x}^j \circ \tilde{u} \Big) =$$
$$= \tilde{u} \circ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \Big(\sum_{j=0}^{i-1} (-b)^{i-j} \binom{i}{j} \cdot \tilde{x}^j \Big) =$$
$$= \tilde{u} \circ g(\tilde{x}).$$

$g(\tilde{x})$ — полином степени $(n-1)$, поскольку коэффициент при $\tilde{x}^{n-1}$ равен

$$a_n (-b)^{n-(n-1)} \binom{n}{n-1} = -n a_n b \neq 0.$$

□

Лемма 8. *Пусть A, B — матрицы одинакового размера, такие что $L(A) = L(B)$. Тогда $L(A+B) \subseteq L(A)$.*

Доказательство. Докажем два простых факта.

1. $L(A+B) \subseteq L(A \cup B)$. Это следует из того, что произвольный вектор из $L(A+B)$ представим в виде линейной комбинации столбцов A и B.

2. $L(A) = L(B) \Rightarrow L(A \cup B) = L(A)$. Вложение $L(A \cup B) \supseteq L(A)$ очевидно в силу монотонности линейного замыкания. Обратное вложение верно, так как любой вектор $\tilde{x}$ из $L(A \cup B)$ представим в виде $\tilde{y} + \tilde{z}$, где $\tilde{y} \in L(A), \tilde{z} \in L(B)$, но по предположению $L(A) = L(B)$, то есть $\tilde{x} = \tilde{y} + \tilde{z} \in L(A)$.

Объединяя эти утверждения, получаем требуемое. $\square$

Лемма 9. *Для системы попарно различных точек* $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subseteq \mathbb{R}^m, q \geq 2$, *при* $k \leq m$, *а также произвольных векторов* $\tilde{d}, \tilde{d}' \in \mathbb{R}^m, (\tilde{d})_i > 0, (\tilde{d}')_i > 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ *справедливо*

$$U^k(P_{S,\tilde{d}} + P'_{S,\tilde{d}'}) \subseteq U^k[S]$$

Доказательство. Применим предыдущую лемму при $A = P_{S,\tilde{d}}$, $B = P'_{S,\tilde{d}'}$. Получим:

$$L(P_{S,\tilde{d}} + P'_{S,\tilde{d}'}) \subseteq L(P_{S,\tilde{d}}.)$$

Откуда, в силу монотонности операции линейного замыкания,

$$U^k(P_{S,\tilde{d}} + P'_{S,\tilde{d}'}) \subseteq U^k(P_{S,\tilde{d}}).$$

По лемме 6, $U^k(P_{S,\tilde{d}}) = U^k[S]$. $\square$

Теорема 5 (обобщённый метрический критерий k-сингулярности)**.** *Система точек* $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ *пространства* $\mathbb{R}^m$ *является* k*-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор* $(c_1, \ldots, c_q)$ *такой, что для всех* $\tilde{s} \in \mathbb{R}^m$ *справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{q} c_i \rho^k(\tilde{s}, \tilde{s}_i) = 0, \tag{8}$$

где ρ *— обобщённая метрика Хэмминга, обобщённая* l_1*-метрика, либо их сумма.*

Замечание. Случай суммы многих обобщённых метрик Хэмминга и обобщённых l_1-метрик, возможно, с неотрицательными коэффициентами при них, сводится к случаю суммы одной обобщённой метрики Хэмминга и одной обобщённой l_1-метрики. поскольку коэффициенты при метриках можно соответствующим образом сгруппировать.

Доказательство. Проводится по схеме доказательства теоремы 4. Укажем, какие изменения в нём нужно произвести.

Необходимость. Для обобщённой метрики Хэмминга и обобщённой l_1-метрики достаточно заменить матрицу P_S на соответствующую матрицу попарных расстояний и воспользоваться вместо леммы 3 леммой 6.

Для случая суммы метрик нужно заметить, что в силу леммы 9:

$$L^{\perp}(U^k[S]) \subseteq L^{\perp}(U^k(P_{S,\tilde{d}} + P'_{S,\tilde{d}'})).$$

Достаточность. *Обобщённая метрика Хэмминга.* Пусть $\tilde{d} \in \mathbb{R}^m, (\tilde{d})_i > 0\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$ — вектор коэффициентов обобщённой метрики Хэмминга. Формула (4) заменяется на следующую формулу:

$$\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^m\ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \left(\sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i (\tilde{1} - \tilde{t}_i) \right)^k = \left(\sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i \cdot \tilde{1} - \sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i \cdot \tilde{t}_i \right)^k. \tag{9}$$

Эта формула есть полином степени k от $\sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i \cdot \tilde{t}_i$.

Теперь вместо леммы 5 мы применим лемму 7 при $\sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i \cdot \tilde{t}_i, \tilde{y} = (\tilde{d})_{z(1)} \cdot \tilde{t}_{z(1)} \equiv \mathrm{const} \cdot \tilde{w}_1, f(\tilde{x}) = (\sum_{i=1}^{m} (\tilde{d})_i - \tilde{x})^k$. Дальнейшее доказательство остаётся без изменений.

Обобщённая l_1-метрика. Пусть $\tilde{d}' \in \mathbb{R}^m, (\tilde{d})_i > 0\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$ — вектор коэффициентов обобщённой l_1-метрики. Формула (5) заменяется на

$$\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^m\ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{\tilde{t} \in T^i} (\tilde{d}')_i |(\tilde{u})_i - coord(\tilde{t})| \cdot \tilde{t} \right)^k. \tag{10}$$

Производная k порядка по сравнению со случаем обычной l_1-метрики на положительный скалярный множитель $\prod_{i=1}^{k} (\tilde{d}')_{z(i)}$. Этот множитель «объединяется» с множителем $k!$ и не влияет на дальнейший ход доказательства.

Сумма метрик. Доказательство выполняется по схеме случая обобщённой l_1-метрики. Формула (5) заменяется на

$$\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^m\ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{\tilde{t} \in T^i} ((\tilde{d})_i + (\tilde{d}')_i \cdot |(\tilde{u})_i - coord(\tilde{t})|) \cdot \tilde{t} \right)^k. \tag{11}$$

Производная k порядка функции $\rho^k(\tilde{u}, S)$ остаётся прежней, что проверяется непосредственно.

Также заметим, что доказательство принадлежности $p(x_1, x_2, \dots, x_k) \in R^k[S]$ остаётся верным, поскольку всегда можно найти достаточно малую окрестность точки $s_{x_1,x_2,\dots,x_k}$, в которой функция $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ является непрерывной.

□

2.3 Обобщение на случай метрик разрезного конуса CUT^q

Определение 17 ([1]). Множество всевозможных полуметрик на множестве $\{1, 2, \ldots, q\}$ с матрицами попарных расстояний вида

$$\sum_{\tilde{\delta} \in \{0,1\}^q} \lambda_{\tilde{\delta}} (E - \tilde{\delta} \cdot \tilde{\delta}^T - (\tilde{1} - \tilde{\delta}) \cdot (\tilde{1} - \tilde{\delta})^T),$$

где $\lambda_{\tilde{\delta}} \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty]$ при $\tilde{\delta} \in \{0,1\}^q$, называется разрезным конусом (или конусом Хэмминга) и обозначается как CUT^q.

Конус CUT^q описывает всевозможные полуметрики типа l_1 на множестве $\{1, 2, \ldots, q\}$ [1], поскольку полуметрика ρ принадлежит конусу тогда и только тогда, когда существует натуральное r и точки $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_q \in \mathbb{R}^r$ такие, что

$$\rho(i,j) = \sum_{t=1}^{r} |(\tilde{s}_i)_t - (\tilde{s}_j)_t|.$$

Конус разрезных полуметрик задаёт метрики, получаемые на всевозможных системах из q точек. Нас же интересует конкретная система точек $S \subset \mathbb{R}^m$. Поэтому определим подконус полуметрик, которые можно получить на заданной системе точек.

Определение 18. Пусть задана система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subset \mathbb{R}^m$. Множество всевозможных обобщённых полуметрик Хэмминга назовём разрезным конусом, согласованным с системой точек S, и обозначим как CUT_S^q.

Лемма 10. *Любая полуметрика из CUT_S^q имеет матрицу попарных расстояний $\|\rho(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j)\|_{i,j=1}^q$ вида*

$$\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \sum_{\tilde{\delta} \in T^r} (E - \tilde{\delta} \cdot \tilde{\delta}^T - (\tilde{1} - \tilde{\delta}) \cdot (\tilde{1} - \tilde{\delta})^T). \tag{12}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную обощённую полуметрику Хэмминга. Обозначим вектор её коэффициентов через $\tilde{d}$.

Рассмотрим ij-й элемент матрицы. Бинарная матрица T^r состоит из характеристических векторов системы точек по координате r. Внутренняя сумма в (12) равно расстоянию Хэмминга между i-й и j-й строками матрицы T^r. В каждой из этих строк лишь одна единица. Поэтому очевидно, что расстояние Хэмминга равно либо нулю, если значение данной координаты у точек совпадает, либо двум, если оно различается. Сравнивая это с определением обобщённой полуметрики Хэмминга, получаем, что при $\lambda_r = \frac{(\tilde{d})_r}{2}$ матрица попарных расстояний выбранной полуметрики задаётся формулой вида (12). $\square$

Следствие. Любая полуметрика из CUT_S^q принадлежит CUT^q, то есть CUT_S^q является подконусом CUT^q.

Замечание. Можно выбрать такую систему из q точек, что T_S будет содержать всевозможные бинарные векторы из q элементов. В этом случае конусы CUT_S^q и CUT^q совпадают.

Обычно метрики из разрезного конуса CUT^q рассматриваются как функции, определённые на множестве $\{1, 2, \ldots, q\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$. Это связано с тем, что данный конус определяется лишь через свойства матрицы попарных расстояний. Мы же определили конус CUT_S^q как множество полуметрик Хэмминга на системе точек, а не как множество полуметрик с матрицами попарных расстояний заданного вида. Поэтому мы будем считать, что метрики из CUT_S^q заданы на множестве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Это существенно для получения метрического критерия k-сингулярности, который требует, чтобы метрика было определена для произвольных точек пространства $\mathbb{R}^m$, а не только для точек системы S.

Теорема 6 (метрический критерий k-сингулярности для конуса разрезных полуметрик)**.** *Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1, \ldots, c_q)$ такой, что для всех метрик ρ из конуса разрезных полуметрик, согласованных с системой точек S, и для всех $\tilde{s} \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{q} c_i \rho^k(\tilde{s}, \tilde{s}_i) = 0. \tag{13}$$

Доказательство.

Необходимость. Доказывается аналогично доказательству необходимости в теореме 4. Заменим матрицу P_S на $P_{S,\tilde{d}}$ и воспользуемся вместо леммы 3 леммой 6. Поскольку лемма 6 верна для любой обобщённой полуметрики Хэмминга, получим требуемое утверждение. Заметим, что в качестве вектора $(c_1, \ldots, c_q)$ можно взять любой элемент из $L \perp (U^k[S])$, то есть этот вектор не зависит от выбора ρ.

Достаточность. Выберем в качестве ρ обычную (не обобщённую) метрику Хэмминга. Для всех $\tilde{s} \in \mathbb{R}^m$ верно равенство (13). Используя теорему 4, получим, что система точек k-сингулярна. □

2.4 Лемма о равенстве линейных замыканий

Дмитрий Кондрашкин обнаружил неточность в доказательстве вложения $L(H_S) \subseteq L(P_S)$ в лемме 2 в работе [2]. Мне было предложено устранить эту неточность.

Сначала приведём исходное доказательство из [2]:

> Для доказательства вложения $L(H_S) \subseteq L(P_S)$ достаточно показать, что
>
> $$\tilde{1} \in L(mE - H_S). \qquad (14)$$
>
> Пусть эта принадлежность не выполняется и $\tilde{1} = H_S\tilde{c}, \tilde{c} = (c_1, \ldots, c_q)$, тогда
>
> $$(mE - H_S)\tilde{c} = mE\tilde{c} - \tilde{1} = m\sum_{i=1}^{q} c_i\tilde{1} - \tilde{1} = \left(m\sum_{i=1}^{q}(c_i - 1)\tilde{1}\right).$$
>
> Поскольку принадлежность (14) не выполняется, то $m\sum_{i=1}^{q} c_i = 1$, но тогда из $\tilde{1} = H_S\tilde{c}$ следует, что $1 = h_{11}c_1 + \cdots + h_{1q}c_q < m\sum_{i=1}^{q} c_i = 1$, где $H_S = \|h_{ij}\|_{q\times q}$ (мы пользуемся тем, что $q \geq 2, h_{11} = m$ и $h_{1j} < m$ при $j \in \{2, \ldots, q\}$, если точки попарно различны). Получили противоречие.

Неточность в этом доказательстве заключается в том, что для выполнения неравенства $h_{11}c_1 + \cdots + h_{1q}c_q < m\sum_{i=1}^{q} c_i$ помимо требуемых условий необходимо, чтобы все коэффициенты c_i были неотрицательными.

Была проверена гипотеза о том, что всегда можно найти такой вектор $\tilde{c}$ с неотрицательными компонентами, что $\tilde{1} = H_S\tilde{c}$. Тот факт, что всегда можно найти вектор $\tilde{c}$ без ограничения на знак компонент, следует из того, что $L(T_S) = L(H_S)$, а вектор $\tilde{1}$ является суммой столбцов подматрицы T^1 матрицы T^S. Покажем, что эта гипотеза не верна. Рассмотрим следующую «Г-образную» систему из $q = 4$ точек в $\mathbb{R}^2$ (в ячейках таблицы указан номер точки):

1		
2	3	4

Запишем её матрицы T_S и H_S:

$$T_S = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \ H_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица H_S является невырожденной (проверяется непосредственно), поэтому система линейных уравнений $H_S\tilde{c} = \tilde{1}$ имеет единственное решение

$$\tilde{c} = (0.6, -0.2, 0.4, 0.4)^T,$$

то есть для данной системы точек не существует вектора $\tilde{c}$ с неотрицательными компонентами, такого, что $H_S\tilde{c} = \tilde{1}$. Гипотеза не верна.

Затем было решено проверить, существует ли система точек S и вектор $\tilde{c}$, т.ч.

$$\begin{cases} H_S\tilde{c} = \tilde{1} \\ m\sum_{i=1}^{q} c_i = 1 \end{cases} \tag{15}$$

Если это так, то $\tilde{1} \notin L(P_S)$ и утверждение леммы не верно.

Заметим, что (15) есть система линейных алгебраических уравнений. Для проверки её совместности воспользуемся следующей теоремой:

Теорема 7 (Кронекер-Капелли)**.** *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.*

Таким образом, нужно проверить, существует ли система точек S, т.ч. верно равенство

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} H_S \\ m\tilde{1}^T \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} H_S & \tilde{1} \\ m\tilde{1}^T & 1 \end{array}\right) \tag{16}$$

Заметим, что если матрица $H_S = \|h_{ij}\|_{q\times q}$ есть характеристическая матрица, то для P_S выполняется неравенство треугольника. Учитывая, что $P_S = mE - H_S$, получаем, что для H_S должно быть верно

$$(m - h_{ij}) \leq (m - h_{ik}) + (m - h_{kj}) \ \forall i, j, k \in \{1, \ldots, q\} \tag{17}$$

Фиксируем $q \geq 2$ и m и переберём всевозможные H_S как симметричные матрицы со значением m на диагонали и значениями из множества $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ вне диагонали. В ходе численного эксперимента было установлено, что находятся матрицы, удовлетворяющие условию (16). Но все эти матрицы нарушают неравенство треугольника в форме (17).

Итак, можно сделать вывод, что равенство линейных замыканий H_S и P_S не может следовать непосредственно из «простых» свойств матрицы H_S: неотрицательности, симметричности, значений m на диагонали и меньших целочисленных значений вне диагонали матрицы. Однако при добавлении неравенства треугольника в форме (17) утверждение о равенстве замыканий становится верным. Скорее всего, в доказательстве нужно использовать именно это неравенство. Поиск такого доказательства — направление дальнейших исследований.

3 Заключение

В данной работе был существенно обобщён метрический критерий k-сингулярности, полученный П.А. Карповичем в работе [7].

На защиту дипломной работы выносится:

- авторское доказательство метрического критерия k-сингулярности системы точек для метрики Хэмминга и l_1-метрики;
- метрический критерий k-сингулярности для обобщённой метрики Хэмминга, обобщённой l_1-метрики, а также их суммы;
- метрический критерий k-сингулярности для конуса разрезных полуметрик;
- пример, показывающий, что не всегда существует вектор $\tilde{c}$ с неотрицательными компонентами, такой, что $H_S\tilde{c} = \tilde{1}$.

Направлением дальнейших исследований является продолжение поиска способа устранить неточность в доказательстве вложения $L(H_S) \subseteq L(P_S)$.

4 Список литературы

[1] *Деза М. М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик, М.: МЦНМО, 2001.

[2] *Дьяконов А. Г.* Критерии вырожденности матрицы попарных l_1 расстояний и их обобщения, Докл. РАН. 425:1 (2009), 11-14.

[3] *Дьяконов А. Г.* Критерии корректности алгебраических замыканий модели алгоритмов вычисления оценок, Докл. АН, 420:6 (2008), 732-735.

[4] *Дьяконов А. Г.* Метрики алгебраических замыканий в задачах распознавания образов с двумя непересекающимися классами, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 48:5 (2008), 916-927,

[5] *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации, Пробл. кибернетики, 33 (1978), 5-68.

[6] *Журавлев Ю. И.* Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II, Кибернетика, 6 (1977), 21-27.

[7] *Карпович П. А.* Критерии k-сингулярности и разделение 1-сингулярных систем, Вестник Московского университета. Секция, 15. Вычислительная математика и кибернетика 34:4 (2010), 164-171.

[8] *Reid L., Sun X.* Distance matrices and ridge function interpolation, Canadian Journal of Mathematics., 45 (1993), 1313-1323.