Выбор априорного распределения

Грабовой Андрей Валериевич

Московский физико-технический институт

ВЦ РАН, Москва, 2018

Общие сведения

Постановка задачи

Пусть $p(x|\theta)$ — модель с неизвестным θ.
Нужно получить априорное распределение $p(\theta)$.

Информативное априорное распределение

Использует некоторую определенную информация о параметре.

Неинформативное априорное распределение

Использует только общую информацию о параметре.

Несобственое априорное распределение(improper priors)

Это такой prior к которому не требуется свойство нормируемости.
К примеру допускается, что $\forall\theta \in \mathbb{R}\ p(\theta) = 1$
Выполняется свойство: $\forall\theta_1, \theta_2\ p(\theta_1) > p(\theta_2) \Leftrightarrow \theta_1$ более правдоподобный чем θ_2.
Требуется, чтобы posterior имел свойство нормируемости.

Априорное для $N(\mu, \sigma^2)$

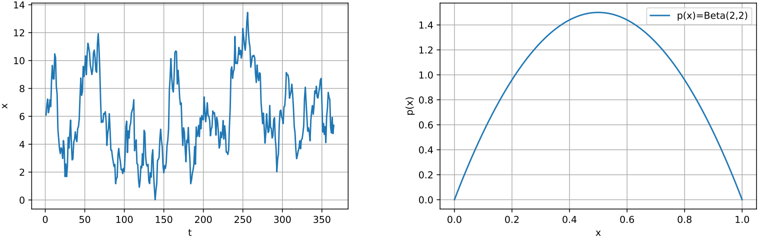
Задача:

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, нужно предложить априорное распределение на μ и σ не имея никаких представлений о выборке.

Вопрос:

Какое Вы можете предложить априорное распределение на параметры μ и σ.

- Какое это априорное распределение?
- Информативное или неинформативно?
- Собственное или несобственное?



(a) (b)

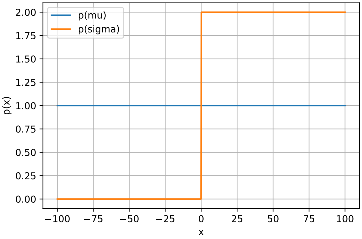
Рис.: информативный prior

Описание:

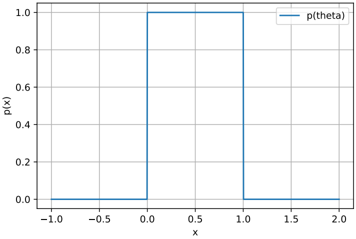
(a) — случайное блуждание. Тогда $p(t_{i+1}) \sim N(t_{i+1}|t_i, \sigma^2)$

(б) — информативный prior на параметр в $Be(\theta)$. Проверяем насколько симетрична монетка только что вышедшая с конвейера.

Примеры



(a)



(b)

Рис.: неинформативный prior

Описание:

(a) — μ и σ параметры нормального распределения

(б) — неинформативный prior на параметр в $Be(\theta)$. Заложены только знания о том, что θ это вероятность.

Improper prior

Improper posterior:

$x \sim Be(\theta),\ p(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)} = Beta(0,0) \Rightarrow \int_0^1 p(\theta)d\theta > -\log 0 = \infty$

$p(\theta|x) \propto \theta^{x-1}(1-\theta)^{-x} \Rightarrow \int_0^1 p(\theta|x)d\theta = \int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{-x}d\theta = \infty$

Proper posterior:

$x \sim Bin(n,\theta),\ p(\theta) = Beta(0,0)$

$p(\theta|x) \propto \theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1} \Rightarrow \int_0^1 p(\theta|x) = \int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}d\theta \leq$
$\leq_{x\neq n} \int_0^1 \theta^{x-1}d\theta =_{x\neq 0} \frac{1}{x}$

Теорема:

Если априорное распределение дискретной(непрерывной) случайной величины собственное распределение, тогда апостериорное распределение всегда(почти всегда) собственное.

$p(\theta|x) \propto p(x|\theta)p(\theta) \Rightarrow \int p(x|\theta)p(\theta)d\theta = p(x) \leq \sum p(x_i) =$
$= \sum \int p(x_i|\theta)p(\theta)d\theta = \int \sum p(x_i|\theta)p(\theta)d\theta = \int p(\theta)d\theta < \infty$

Reference prior

Пусть $p(\theta)$, $p(\theta|x)$ — априорное и апостериорное распределение некоторого параметра θ, q(x) — неизвестное распределение наблюдаемой величины x

Определение:

$$KL(p) = \mathsf{E}\left[D_{KL}\left(p\left(\theta|x\right)||p\left(\theta\right)\right)\right] \to \max_{p}$$

В некотором смысле мы выбираем такой prior, который является наименее информативным после наблюдения x.

Альтернативная форма:

$KL(p) = \int q(x) \int p(\theta|x) \log \frac{p(\theta|x)}{p(\theta)} d\theta dx = - \int q(x) H(\theta|x) dx + H(\theta) =$
где $H(x) = -\int p(x) \log p(x) dx$ — энтропия

$$= -\int p(\theta) \log \left[\frac{p(\theta)}{\sqrt{N\mathcal{I}(\theta)}}\right] d\theta = -D_{KL}(p||\mathcal{I}) \to \max_{p} \Rightarrow p(\theta) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\theta)}$$

Jeffreys prior

Определение:

$$p(\bar\theta) \propto \sqrt{\det \mathcal{I}(\bar\theta)} \Rightarrow p(\theta) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\theta)},\ \mathcal{I}(\theta) = -\mathsf{E}\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial^2 \theta}\right]$$

Не зависит от параметризации:

$$p(\phi) \propto p(\theta)\left|\frac{\partial\theta}{\partial\phi}\right| \propto \sqrt{\mathsf{E}\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta^2}\right]\frac{\partial\theta^2}{\partial\phi^2}} = \sqrt{\mathsf{E}\left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\phi^2}\right]} = \sqrt{\mathcal{I}(\phi)}$$

Пример использования:

Пусть заданы $x \sim Be(\theta)$ и задана параметризация $\phi = \frac{\theta}{1-\theta}$

$\log L(x,\theta) = x\log\theta + (1-x)\log(1-\theta) \Rightarrow \mathcal{I}(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$

$p(\theta) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\theta)} \Rightarrow p(\theta|x) \propto \theta^{x-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}-x}$

$p(\phi|x) = p(\theta|x)\frac{\partial\theta}{\partial\phi} \propto \frac{\phi^{x-\frac{1}{2}}}{(1+\phi)^2}$

$\log L(x,\phi) = x\log\phi - \log(1+\phi) \Rightarrow \mathcal{I}(\phi) = \frac{1}{\phi(1+\phi)^2}$

$p(\phi) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\phi)} \Rightarrow p(\phi|x) \propto \frac{\phi^{x-\frac{1}{2}}}{(1+\phi)^2}$

Jeffreys prior

Распределение Гаусса с μ как параметром:

$$p(x|\mu) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Rightarrow p(\mu) \propto \sqrt{\mathcal{I}(\mu)} = \sqrt{\mathsf{E}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} = \frac{1}{|\sigma|} \propto 1$$

Распределение Гаусса с σ как параметром:

$$p(x|\sigma) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Rightarrow p(\sigma) = \sqrt{\mathsf{E}\left(\frac{3(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma^2}} \propto \frac{1}{|\sigma|}$$

Распределение Пуассона с λ как параметром:

$$p(n|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \Rightarrow p(\lambda) = \sqrt{\mathsf{E}\left(\frac{n}{\lambda^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$$

Во всех 3-х случаях получаем improper prior для μ, $\log|\sigma|$ и $\sqrt{\lambda}$.

Вывод

Информативный & неинформативный prior:

Информативный prior, тот в который вкладываются некоторые знания об наблюдениях.

Неинформативный prior, использует только общие представления о функции распределения.

Собственный & несобственный prior:

Можно использовать improper prior $\Rightarrow$ нужно проверить posterior

Использовав proper prior $\Rightarrow$ posterior всегда proper

Jeffreys prior:

Априорное распределение, которое построено на основе максимизации ожидаемого сходства prior и соответствующего ему posterior.