Математический формализм субъективного моделирования

Ю.П. Пытьев,
О. В. Фаломкина,
С. А. Шишкин,
А. И. Чуличков

Введение

- При построении математической модели объекта исследования модельеру-исследователю важно учесть все формализованные знания из соответствующей предметной области.
- При этом ему существенно сложнее, но не менее важно, воспользоваться обширными неформализованными знаниями, научным опытом и интуицией исследователя, поскольку, как известно, именно такие знания и интуиция нередко оказываются источником новых изобретений и открытий.

Танака К. Итоги рассмотрения факторов неопределённости и неясности в инженерном искусстве. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения.

Сб. ред. Ягер. Радио и связь. М: 1988.

Введение

Математический формализм субъективного моделирования:
$M(x)$ - модель объекта, $x \in X$ - неизвестный параметр.

Неопределенный элемент $\tilde{x}$ моделирует субъективные суждения исследователя как неопределенные высказывания о его неизвестных значениях $x \in X$ и их модальности, характеризующие его представления об их истинности.

Меры правдоподобия и доверия

X - множество элементарных высказываний о значении неопределенного элемента $\tilde{x}$

$\mathcal{P}(X)$ - множество всех подмножеств X,

т.е. всех высказываний $A \subset X$.

Модель субъективных суждений:

$(X, \mathcal{P}(X), Pl^{\tilde{x}}, Bel^{\tilde{x}})$.

Каждому элементарному высказыванию $x \in X$

сопоставим

$t^{\tilde{x}}(x) = Pl^{\tilde{x}}(\tilde{x} = x)$ - правдоподобие равенства $\tilde{x} = x$,

$\hat{t}^{\tilde{x}}(x) = Bel^{\tilde{x}}(\tilde{x} \neq x)$ - доверие к неравенству $\tilde{x} \neq x$.

Принцип относительности

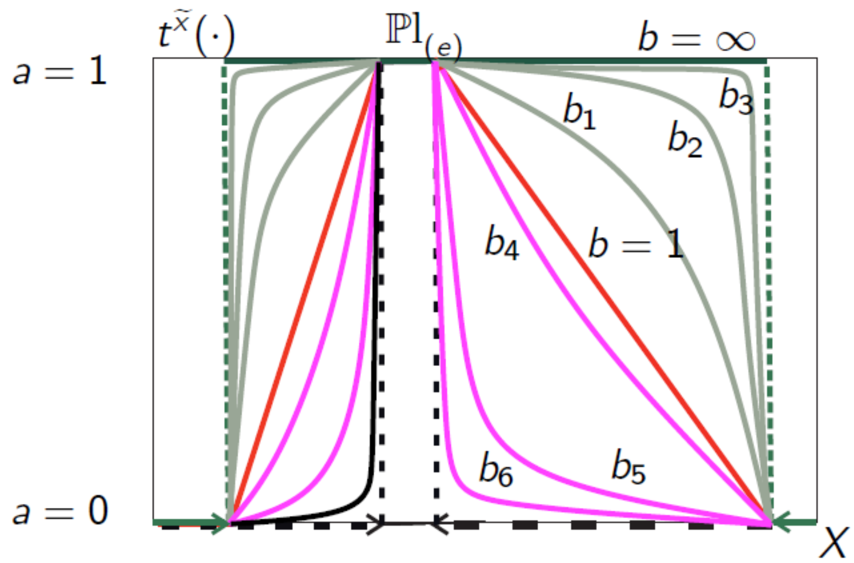


Рис.: Распределения правдоподобий значений но. э. $\widetilde{x}$, полученные из распределения $t^{\widetilde{x}}(\cdot)$ с помощью функций из параметрического семейства преобразований $\gamma(a) = a^b$, $a \in [0, 1]$, $b \in (0, \infty)$: при $b = 1$ (выделено красным цветом), при $0 < b_3 < b_2 < b_1 < 1$ (выделены фиолетовым цветом) и $1 < b_4 < b_5 < b_6 < \infty$ (выделены серым цветом). Черные и серые штриховые линии соответствуют предельным случаям распределений.

Меры правдоподобия и доверия

Для любого $E \in \mathcal{P}(X)$

$$Pl_X(E) \equiv Pl^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E) = \sup_{x \in E} t^{\tilde{x}}(x)$$ -

распределение правдоподобий значений неопределенного элемента $\tilde{x}$

$$Bel_X(E) \equiv Bel^{\tilde{x}}(\tilde{x} \in E) = \inf_{x \in X \setminus E} \hat{t}^{\tilde{x}}(x)$$ -

распределение доверий значений неопределенного элемента $\tilde{x}$.

Функция от нечеткого элемента

Любая функция $\varphi(\cdot): X \to Y$ от нечеткого элемента $\tilde{x}$ задает неопределенный элемент $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$ со значениями в $(X, \mathcal{P}(X), Pl^{\tilde{y}}, Bel^{\tilde{y}})$

$$t^{\tilde{y}}(y) = Pl^{\tilde{y}}(\tilde{y} = y) = \sup_{x \in X : \varphi(x) = y} t^{\tilde{x}}(x),$$

$$\hat{t}^{\tilde{y}}(y) = Bel^{\tilde{y}}(\tilde{y} \neq y) = \inf_{x \in X : \varphi(x) = y} \hat{t}^{\tilde{x}}(x)$$

Субъективные модели абсолютного незнания и точного знания

- Абсолютное незнание:

$t^{\tilde{x}}(x)=1, \hat{t}^{\tilde{x}}(x)=0, \quad x\in X$, а значит, для любой $\varphi(\cdot): X \to Y$, $\tilde{y}=\varphi(\tilde{x})$,

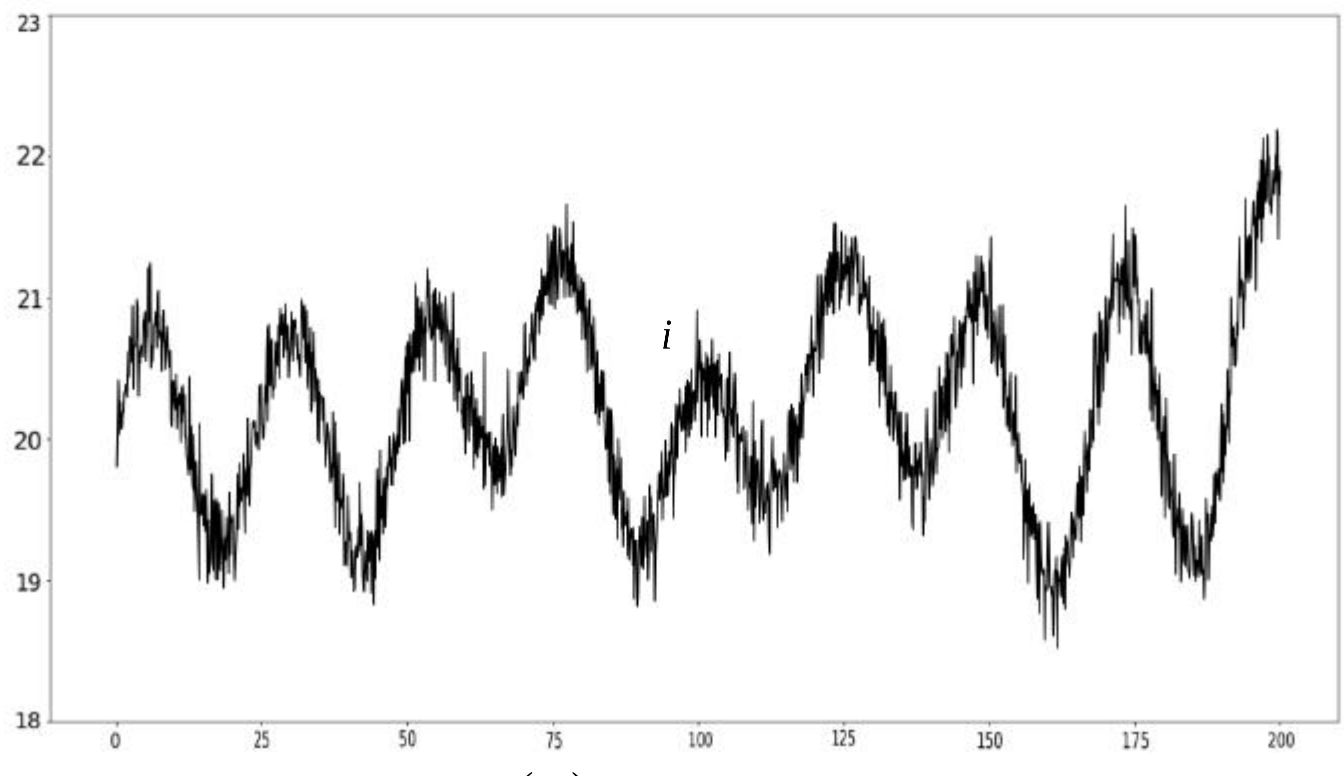
$$t^{\tilde{y}}(y)=1, \hat{t}^{\tilde{y}}(y)=0, \quad y\in Y$$

- Точное знание:

$$t^{\tilde{x}}(x)=Pl^{\tilde{y}}(\tilde{x}=x)=\begin{cases}1, & x=x_0,\\ 0, & x\neq x_0,\end{cases}$$

$$\hat{t}^{\tilde{x}}(x)=Bel^{\tilde{x}}(\tilde{x}\neq x)=\begin{cases}1, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0,\end{cases}$$

Пример. Восстановление модели измерения температуры воды в водоеме



$$y_i = f(t_i) + \nu_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Модель полезного сигнала

$f(t), a \le t \le b$ - сглаживающий сплайн, т.е. кусочно непрерывная функция с интегрируемыми квадратами производных вплоть до q-й – решение задачи на минимум

$$\min\left\{\int_a^b \left(f^{(q)}(t)\right)^2 dt + \rho\sum_{j=0}^{n}\left(f(t_j) - y_j\right)^2 \mid f \in H^q\right\},$$

H^q - гильбертово пространство функций, заданных на (a,b), со скалярным произведением

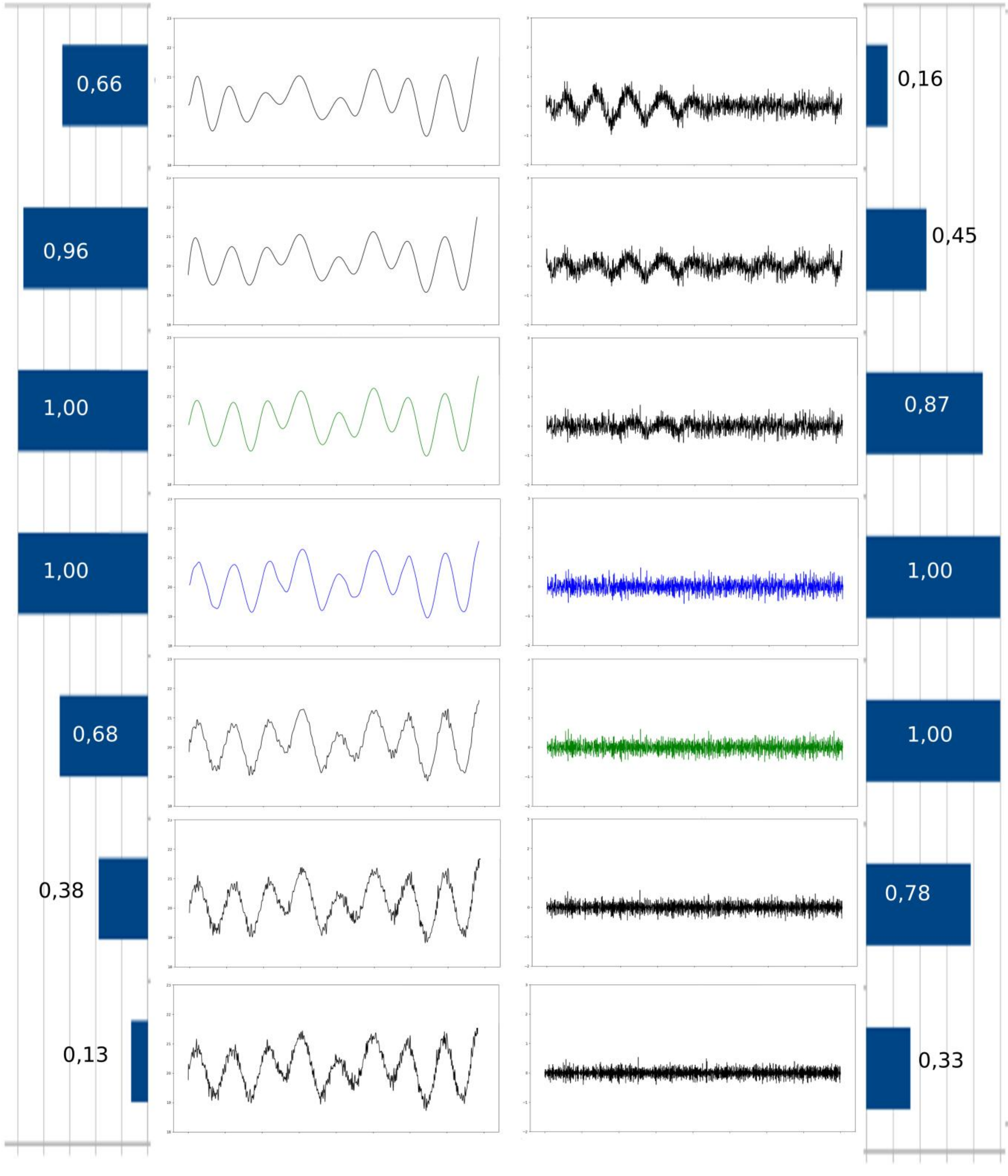
$$\int_a^b f^{(q)}(t)\cdot g^{(q)}(t)dt + \rho\sum_{j=0}^{n} f(t_j)\cdot g(t_j)$$

Свойства решения

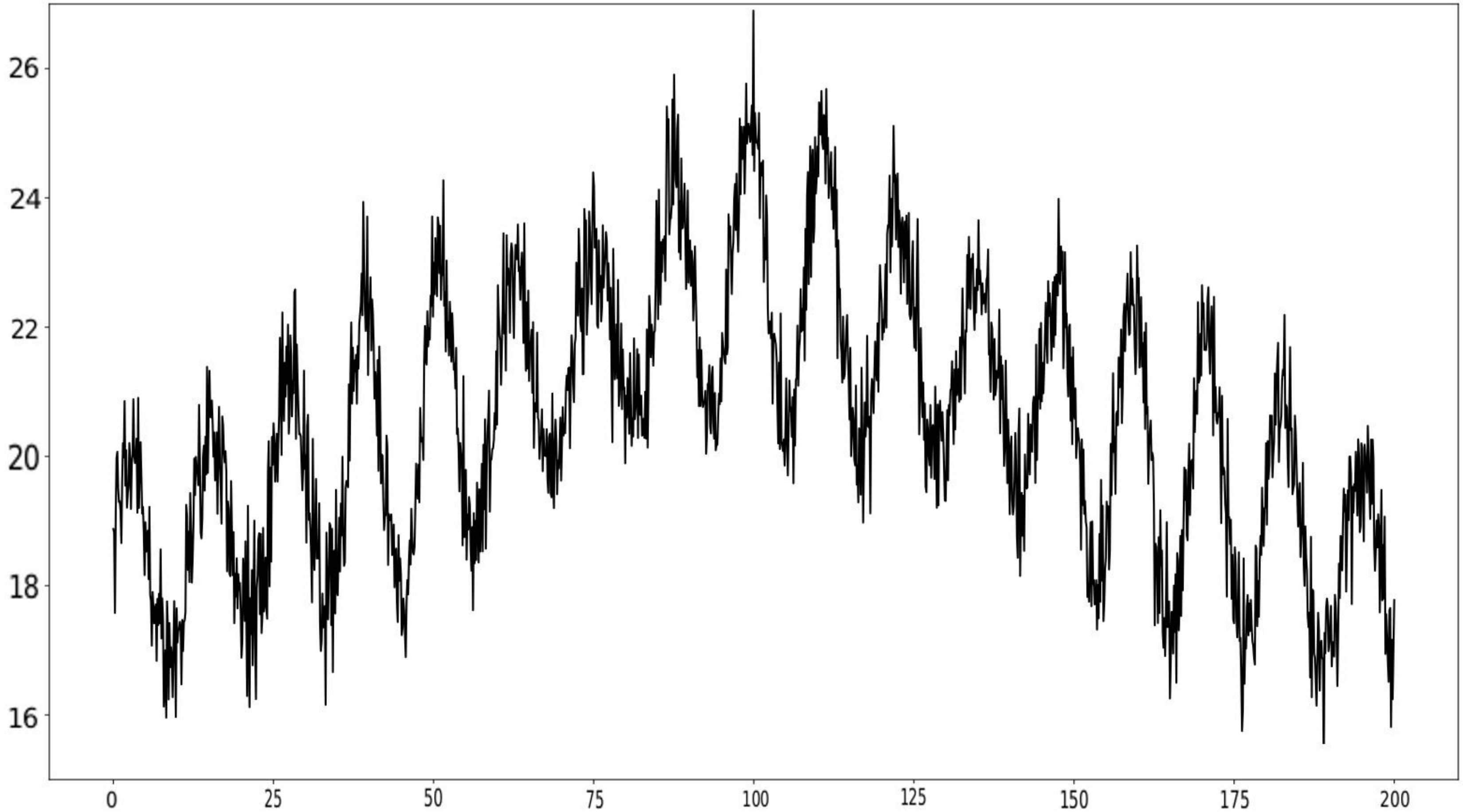
Согласно свойствам сплайнов, если $f_\rho(\cdot)$ – решение поставленной задачи, то $f_\rho(\cdot)$ есть элемент $(n+1)$-мерного подпространства $S^q \subset H^q$, а разность сглаживаемой функции и решения $f_\rho(\cdot)$ принадлежит его ортогональному дополнению.

Результаты моделирования

Распределение правдоподобий значений сглаживающего параметра сплайна для двух разных факторов

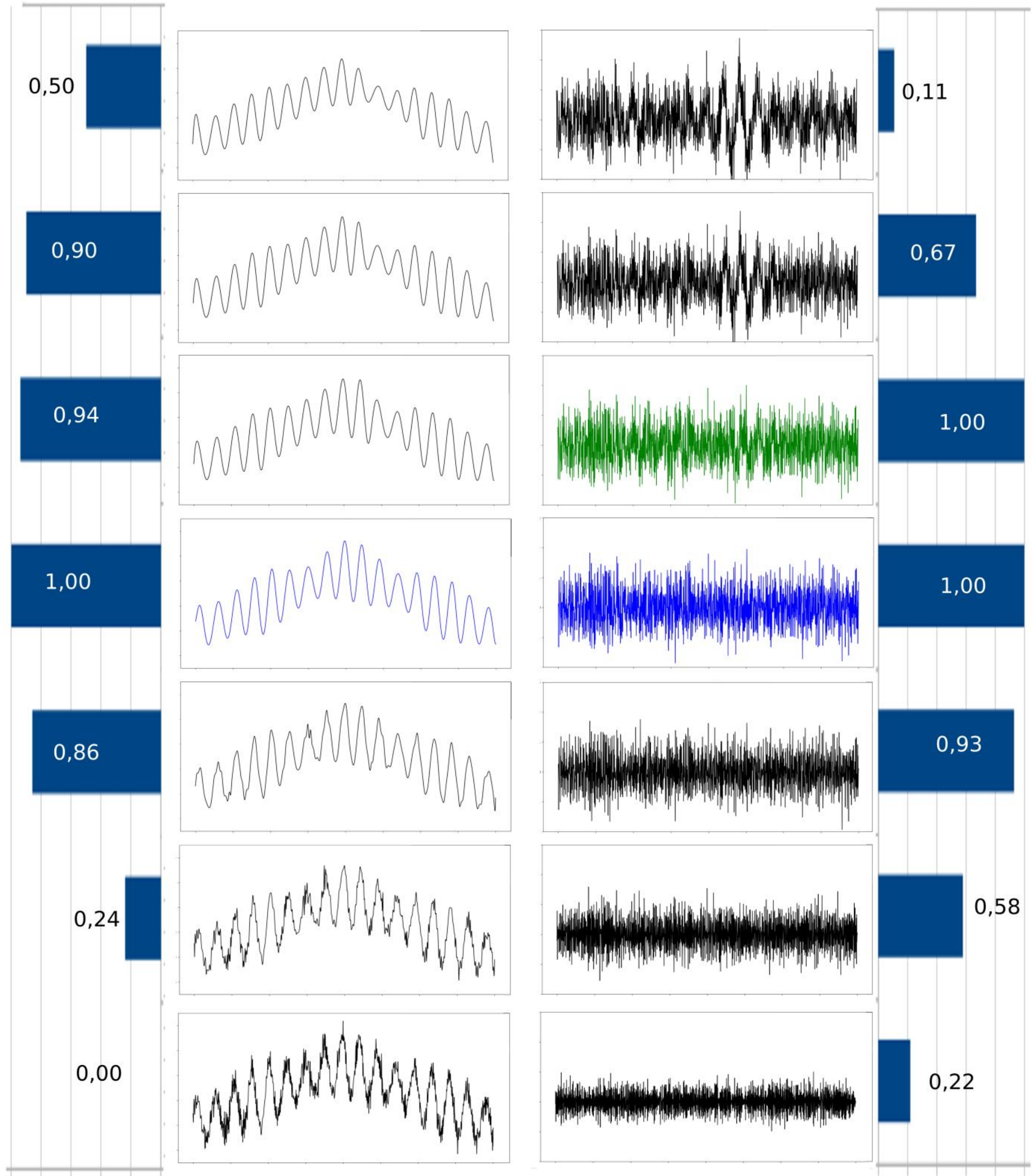


Пример 2.



$$y_i = f(t_i) + \nu_i, \quad i = 0,\ldots,n.$$

Результаты моделирования



Распределение правдоподобий значений сглаживающего параметра сплайна для двух разных факторов

Выводы

- Изложен математический формализм субъективного моделирования.

- Приведен пример его применения для восстановления субъективной математической модели измерений температуры воды в открытом водоеме.

- Предложенный подход позволяет выделить наиболее правдоподобную субъективную модель измерения, на основе которой получена оптимальная оценка временной зависимости температуры и шумового остатка.