

Домашнее задание 1. Сопряжённые распределения и экспоненциальный класс распределений

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, осень 2015

1. Пусть x_1, x_2, \dots, x_N – независимая выборка из непрерывного равномерного распределения $U[0, \theta]$. Требуется найти оценку максимального правдоподобия θ_{ML} , подобрать сопряжённое распределение $p(\theta)$, найти апостериорное распределение $p(\theta|x_1, \dots, x_N)$ и вычислить его статистики: мат.ожидание, медиану и моду. *Подсказка: задействовать распределение Парето.*
2. Предположим, что вы приезжаете в новый город и видите автобус с номером 100. Требуется с помощью байесовского подхода оценить общее количество автобусных маршрутов в городе. Какая из статистик апостериорного распределения, на Ваш взгляд, будет наиболее адекватной? Как изменятся оценки на количество автобусных маршрутов при последующем наблюдении автобусов с номерами 50 и 150? *Подсказка: воспользоваться результатами предыдущей задачи.*
3. Записать распределение Парето с плотностью $\text{Pareto}(x|a, b) = \frac{ba^b}{x^{b+1}} [x \geq a]$ при фиксированном a в форме экспоненциального класса распределений. Найти $\mathbb{E} \log x$ путём дифференцирования нормировочной константы.