

# Распределённые методы оптимизации для задачи оценки состояния энергетических систем

Самал Кубентаева

Научный руководитель: д.ф.-м.н. А. В. Гасников

Москва, 2020

## Энергетика

- Задача оценки состояния системы
- Задача поиска оптимального потока мощности

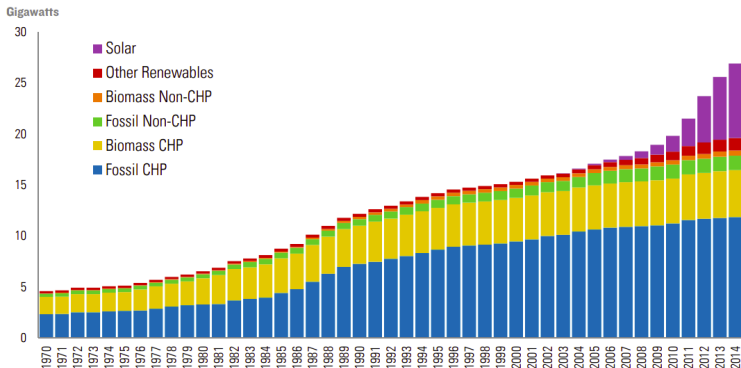
## Цель

Получение общего допустимого набора состояний в системе с учетом всех измерений на узлах.

## Данные

Данные взяты из базы данных MATPOWER для энергетических систем.

# Способы решения



## Основные способы

- Централизованные методы оптимизации
- Распределенные методы оптимизации

## Энергетическая система

- $\mathcal{G} = \{\mathcal{B}, \mathcal{E}\}$
- $\forall n \in \mathcal{B}: \hat{V}_n = |V_n|e^{j\theta_n}, \theta_n, \hat{I}_n = |I_n|e^{j\phi_n}$  и  $\hat{S}_n = P_n + jQ_n$
- $\forall (m, n) \in \mathcal{E}: S_{mn} = P_{mn} + jQ_{mn}$

Объединение закона Кирхгофа и закона Ома:

$$\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v}$$

## Уравнение баланса мощности

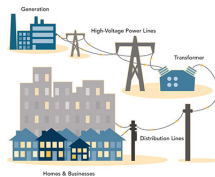
$$P_k = \sum_{j=1}^N |V_k||V_j|(G_{kj} \cos(\theta_k - \theta_j) + B_{kj} \sin(\theta_k - \theta_j))$$

$$Q_k = \sum_{j=1}^N |V_k||V_j|(G_{kj} \cos(\theta_k - \theta_j) - B_{kj} \sin(\theta_k - \theta_j))$$

# Система передачи мощностей

## DC модель

- сопротивление линий значительно меньше активного сопротивления
- разность фаз на соседних узлах мала
- величины напряжения близки к 1



$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_{flow} \\ P_{inj} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{upper} \\ \mathbf{H}_{low} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}$$

## Новый вид уравнения баланса мощности

$$\forall (i, j) \in \mathcal{E} : P_{ij}^{flow} = H_{ij}(\theta_i - \theta_j)$$

$$\forall i \in \mathcal{B} : P_i^{inj} = \sum_{j: (i,j) \in \mathcal{E}} P_{ij}$$



## Общая задача

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^p, \mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^q \\ \text{s.t. } A\mathbf{x} + B\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times p}, B \in \mathbb{R}^{m \times q} \end{aligned}$$

Модифицированная функция Лагранжа:

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y}) + \lambda^\top (A\mathbf{x} + B\mathbf{y} - \mathbf{b}) + (\rho/2) \|A\mathbf{x} + B\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_2^2$$

## Схема метода в общем случае

$$\mathbf{x}_t = \arg \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) + \langle \lambda_{t-1}, A\mathbf{x} + B\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{b} \rangle + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x} + B\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

$$\mathbf{y}_t = \arg \min_{\mathbf{y} \in Y} g(\mathbf{y}) + \langle \lambda_{t-1}, A\mathbf{x}_t + B\mathbf{y} - \mathbf{b} \rangle + \frac{\rho}{2} \|A\mathbf{x}_t + B\mathbf{y} - \mathbf{b}\|_2^2$$

$$\lambda_t = \lambda_{t-1} + \rho(A\mathbf{x}_t + B\mathbf{y}_t - \mathbf{b}).$$

# Общий вид задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\{\mathbf{v}_k \in \mathcal{X}_k\}} \sum_{k=1}^K f_k(\mathbf{v}_k) \\ \text{s.t. } \mathbf{v}_k[l] = \mathbf{u}_{kl} \forall l \in \mathcal{B}_k \quad \forall k \in \mathcal{K}, \\ \mathbf{v}_l[k] = \mathbf{u}_{kl} \forall k \in \mathcal{B}_l \quad \forall l \in \mathcal{K}, \end{array} \right.$$

## Теорема

Пусть  $\mathbf{v}_k^i, \mathbf{u}_{kl}^i, \mathbf{y}_{kl}^i, i = 1, \dots, N$  оследовательность сгенерированная алгоритмом ADMM с некоторым  $\mu > 0$ , определим  $\bar{\mathbf{v}}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_k^i / N$ , аналогично  $\bar{\mathbf{u}}_{kl}, \bar{\mathbf{y}}_{kl}$ . Тогда получим

$$f_k(\bar{\mathbf{v}}_k) - f_k(\mathbf{v}_k^*) \leq \frac{\mu}{2N} \sum_{l \in \mathcal{B}_k} \|\mathbf{u}_{kl}^0 - \mathbf{u}_{kl}^*\|_2^2,$$
$$\|\bar{\mathbf{v}}_k[l] - \bar{\mathbf{u}}_{kl}\|_2 \leq \frac{1}{N} \left( \frac{2}{\mu} \|\mathbf{y}_{kl}^*\|_2 + \|\mathbf{u}_{kl}^0 - \mathbf{u}_{kl}^*\|_2 \right). \quad (1)$$



- 1: **Инициализация:**  $\mathbf{H}, \mathbf{z}, \mu, \varepsilon_{\text{primal}} = 10^{-3}, \varepsilon_{\text{dual}} = 10^{-4},$   
 $\mathbf{u}_{kl}^0 = 0, \mathbf{y}_{kl}^0 = 0 \forall k, l \in K, n$
- 2: **for**  $i = 0$  **do**
- 3:  $\mathbf{v}_k^i = \min_{\mathbf{v}_k \in K} f(\mathbf{v}_k) + \sum_{l \in B_k} \mathbf{y}_{kl}^{i-1} (\mathbf{v}_k[l] - \mathbf{u}_{kl}^{i-1})$   
 $+ \sum_{l \in B_k} \frac{\mu}{2} \|\mathbf{v}_k[l] - \mathbf{u}_{kl}^{i-1}\|_2^2$
- 4:  $\mathbf{u}_{kl}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_k^i[l] + \mathbf{v}_l^i[k])$
- 5:  $\mathbf{y}_{kl}^i = \mathbf{y}_{kl}^{i-1} + \mu (\mathbf{v}_k^i[l] - \mathbf{u}_{kl}^i)$
- 6: **if**  $\|\mathbf{r}_k^i\|_2^2 < \varepsilon_{\text{primal}}$  **и**  $\|\mathbf{s}_k^i\|_2^2 < \varepsilon_{\text{dual}}$  **then**
- 7:     **break**
- 8:     **end if**
- 9: **end for**

# Схема А-АДММ

- 1: **Инициализация:**  $\mathbf{H}, \mathbf{z}, \rho, \varepsilon_{\text{primal}} = 10^{-3}, \varepsilon_{\text{dual}} = 10^{-4},$   
 $\mathbf{u}_{kl}^0 = 0, \hat{\mathbf{u}}_{kl}^0 = 0, \mathbf{y}_{kl}^0 = 0, \hat{\mathbf{y}}_{kl}^0 = 0 \forall k, l \in K$
- 2: **for**  $i = i + 1$  **do**
- 3:  $\mathbf{v}_k^i = \min_{\mathbf{v}_k \in K} f(\mathbf{v}_k) + \sum_{l \in B_k} \hat{\mathbf{y}}_{kl}^{i-1} (\mathbf{v}_k[l] - \hat{\mathbf{u}}_{kl}^{i-1})$   
 $+ \sum_{l \in B_k} \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{v}_k[l] - \hat{\mathbf{u}}_{kl}^{i-1} \right\|_2^2$
- 4:  $\mathbf{u}_{kl}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_k^i[l] + \mathbf{v}_l^i[k])$
- 5:  $\mathbf{y}_{kl}^i = \hat{\mathbf{y}}_{kl}^{i-1} + \rho (\mathbf{v}_k^i[l] - \mathbf{u}_{kl}^i)$
- 6:  $\alpha_i = \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha_{i-1}^2}}{2};$
- 7:  $\hat{\mathbf{u}}_{kl}^i = \mathbf{u}_{kl}^i + \frac{\alpha_{i-1} - 1}{\alpha_i} (\mathbf{u}_{kl}^i - \mathbf{u}_{kl}^{i-1});$
- 8:  $\hat{\mathbf{y}}_{kl}^i = \mathbf{y}_{kl}^i + \frac{\alpha_{i-1} - 1}{\alpha_i} (\mathbf{y}_{kl}^i - \mathbf{y}_{kl}^{i-1})$
- 9: **if**  $\|\mathbf{r}^i\|_2^2 < \varepsilon_{\text{primal}}$  **and**  $\|\mathbf{s}^i\|_2^2 < \varepsilon_{\text{dual}}$  **then**
- 10:     **break**
- 11:     **end if**
- 12: **end for**

# Эксперимент 1

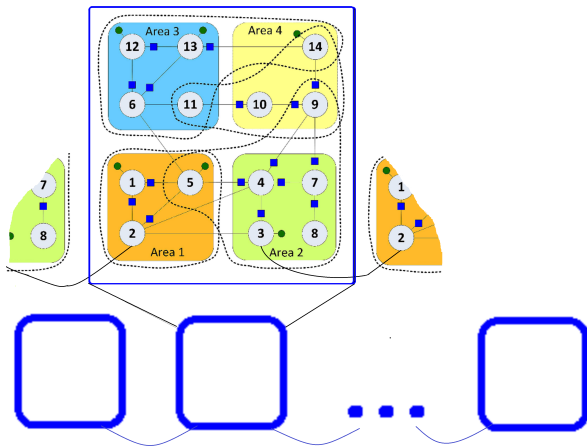


Рис.: Топология сети

# Эксперимент 1

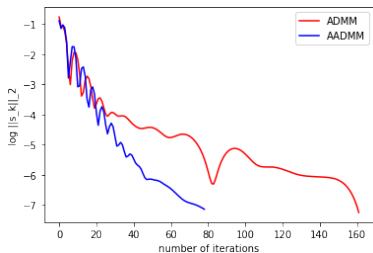
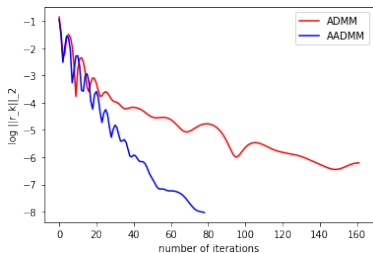


Рис.: сходимость по прямым и двойственным переменным

Параметры:  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon_{dual} = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_{primal} = 10^{-3}$ ,  $\rho = 2$

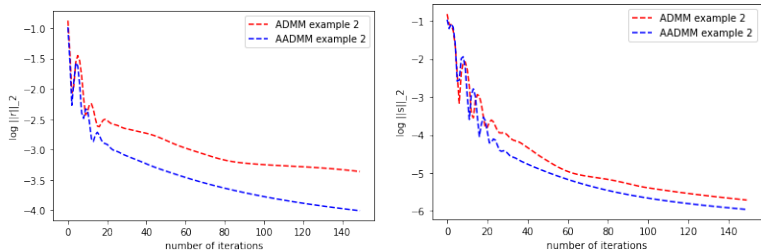





Рис.: сходимость по прямым и двойственным переменным

- Получена теоретическая скорость сходимости  $O(1/N)$  для метода АДММ
- Оба метода на данных из MATPOWER показали линейную скорость сходимости
- Проведено исследование на чувствительность методов к топологии сети
- Распределенные децентрализованные методы эффективны для задачи PSSE

-  Kekatos, V., and Wang, G., and Zhu, H., and Giannakis, “PSSE Redux: Convex Relaxation, Decentralized, Robust, and Dynamic Approaches,” arXiv: 1708.03981, 2017.
-  Stephen Boyd, Neal Parikh, Eric Chu, Borja Peleato and Jonathan Eckstein, “Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers” Foundations and Trends® in Machine Learning, 2010.
-  Goldstein, T. , and ODonoghue, B., and Setzer, S., and Baraniuk, R, “Fast alternating direction optimization methods,” SIAM Journal on Imaging Sciences, 2014.