Методы коррекции метрических нарушений в матрицах парных сравнений

Двоенко С.Д.
Пшеничный Д.О.
Тульский государственный университет

ИОИ-10, 2014

Положительная определённость

- Пусть парные сравнения n элементов множества представлены матрицей $S(n,n)$.
- Если матрица положительно определена, то элементы множества могут быть помещены в n-мерное евклидово пространство в виде соответствующих векторов, различия между которыми представлены в виде расстояний, а сходства – в виде скалярных произведений.
- Согласно теореме косинусов (теорема Пифагора), расстояния могут быть преобразованы в скалярные произведения и наоборот.

Неположительная определённость

- В общем случае, получаемая из экспериментов матрица парных сравнений часто не будет нормированной или даже симметричной.
- Поэтому обычно выполняют необходимые стандартные преобразования с целью нормировки и симметризации.
- Но часто оказывается, что матрица парных сравнений, подготовленная для обработки, является неположительно определённой.

Неположительная определённость

- В этом случае решение задачи обработки, основанное на гипотезе компактности, формально окажется математически некорректным, т.к. поместить элементы множества в евклидово пространство не удастся.
- Необходимо устранить неположительную определённость матрицы парных сравнений.
- Решим задачу устранения неположительной определённости матрицы парных сравнений так, чтобы её элементы были изменены в минимальной степени.

Неположительная определённость

- В отличие от традиционного подхода, основанного на дискретном разложении Карунена-Лоэва, предлагаемый нами метод позволяет корректировать не все а, лишь некоторые элементы матрицы. Коррекция небольшого числа элементов матрицы может быть предпочтительна, например, в задачах экспертного оценивания.

Математическая основа

- Рассмотрим симметричную нормированную матрицу парных сравнений $S(n,n)$, где $s_{ij} = s_{ji},\ -1 < s_{ij} < 1,\ s_{ii} = 1.$
- Пусть S – это матрица некоторой квадратичной формы.
- Критерий Сильвестра: квадратичная форма (и её матрица S) является положительно определённой, тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы S положительны.

Математическая основа

- Следствие из правила инерции квадратичных форм Сильвестра: число отрицательных собственных значений матрицы S в точности совпадает с числом знакоперемен в последовательности $S_1 = 1, S_2, \ldots, S_n = S(n,n)$.
- Здесь нотация $S_i = S(i,i), i = 1, \ldots, n$ обозначает i -й главный минор матрицы $S = S(n,n)$.

Математическая основа

- Известно, что одновременная перестановка двух строк и двух соответствующих столбцов матрицы $S = S(n,n)$ не изменяет её собственных значений и собственных векторов.
- Такая перестановка соответствует перестановке двух соответствующих элементов исходного множества.

Математическая основа

- Можно показать, что значения главных миноров матрицы S уменьшаются, начиная с 1, и тогда некоторый главный минор может оказаться отрицательным.
- Можно показать, что можно скорректировать элементы S именно в тех строке и столбце, добавление которых сделало очередной главный минор отрицательным, так, что этот минор станет положительным.

Математическая основа

- Также можно показать, что, имея исходный порядок элементов множества и соответствующую матрицу парных сравнений, нам, скорее всего, придётся корректировать большое число элементов.
- Идея минимальной коррекции матрицы парных сравнений состоит в том, чтобы найти такой порядок элементов, при котором потребовалось бы скорректировать как можно меньше элементов.

Оптимальная ранжировка

- Идея оптимальной ранжировки заключается в том, что при просмотре главных миноров матрицы, соответствующей этой ранжировке, их значения будут убывать медленнее, чем значения главных миноров исходной матрицы, соответствующей исходному (неоптимальному) порядку элементов множества.

Оптимальная ранжировка

- Оптимальное ранжирование элементов множества можно получить следующим методом.
  - последовательным перебором элементов множества определяем, при удалении какой строки и столбца значение детерминанта получающейся матрицы размерности на единицу меньшей меняет знак (меняется чётность числа смен знаков в последовательности главных миноров) и оказывается максимальным по модулю.
  - удаляем окончательно этот элемент из множества и считаем, что в искомой ранжировке он занимает последнее место
  - повторяем процедуру для меньшей матрицы и т.д.

Оптимальная ранжировка

- При применении этого метода получается следующее. Т.к. ищется максимальное значение детерминанта с противоположным знаком, то отрицательных главных миноров будет немного. Они будут расположены максимально близко к концу последовательности главных миноров **(ММРО-2013)**.

Процедура коррекции

- Просматриваются последовательно все главные миноры
- Если очередной минор $S_k < 0$, то он корректируется следующим образом.
- Задаётся значение $\tilde{C}$ из диапазона $(0; S_{k-1})$ – это значение детерминанта скорректированного минора.

Процедура коррекции

- Искомые значения s_{ki}, s_{ik} обозначим как $x_i, i = 1, n-1$.
- Разложим S_k по последней строке:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+i} s_{ki} (S_k)_i^k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k+i} x_i (S_k)_i^k + S_{k-1} \quad .$$

- Здесь нотация вида $(S_k)_i^k$ означает матрицу S_k, из которой удалили k-ю строку и i-й столбец.
- Разложим минор $(S_k)_i^k$ по последнему столбцу:

$$(S_k)_i^k = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+k-1} s_{jk} ((S_k)_i^k)_k^j = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+k-1} x_j (S_{k-1})_i^j \, .$$

Процедура коррекции

- Перепишем значение определителя S_k :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k+i} x_i \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+k-1} x_j (S_{k-1})_i^j + S_{k-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k+i} x_i (-1)^{j+k-1} x_j (S_{k-1})_i^j + S_{k-1} =$$
$$= S_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{i+j} x_i x_j (S_{k-1})_i^j \ .$$

- Можно заметить, что $(-1)^{i+j}(S_{k-1})_i^j$ – элемент (i, j) матрицы, обратной матрице $S(k-1, k-1)$, делённый на S_{k-1}.
- Отсюда $S_k = S_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_i x_j S_{k-1} r_{ij} = S_{k-1}(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_i x_j r_{ij})$.

Процедура коррекции

- r_{ij} – элемент (i, j) матрицы R, являющейся обратной матрице $S(k-1, k-1)$, получающейся при взятии первых $k-1$ строк и $k-1$ столбцов матрицы S.
- Из этого соотношения получается выражение для вычисления:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_i x_j r_{ij} = 1 - \frac{\tilde{C}}{S_{k-1}}$$

Процедура коррекции

- Т.к. мы хотим, чтобы получаемая матрица минимально отличалась от исходной, то требуется решить следующую оптимизационную задачу.

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} (s_{ik} - x_i)^2 \to \min \\ g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_i x_j r_{ij} = C . \end{cases}$$

- Здесь $C = 1 - \dfrac{\tilde{C}}{S_{k-1}}$.

Процедура коррекции

- Решая эту систему методом Лагранжа, приходим к тому, что требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda \sum\limits_{i=1, i\in A}^{k-1} x_i r_{ip} + \sum\limits_{i=1, i\notin A}^{k-1} s_{ki} r_{ip} = s_{kp} - x_p, \, p \in A \\ \sum\limits_{i=1, i\in A}^{k-1} \sum\limits_{j=1, j\in A}^{k-1} x_i x_j r_{ij} + \sum\limits_{i=1, i\in A}^{k-1} \sum\limits_{j=1, j\notin A}^{k-1} x_i s_{jk} r_{ij} + \\ \qquad + \sum\limits_{i=1, i\in A}^{k-1} \sum\limits_{j=1, j\in A}^{k-1} s_{ki} x_j r_{ij} + \sum\limits_{i=1, i\notin A}^{k-1} \sum\limits_{j=1, j\notin A}^{k-1} s_{ki} s_{jk} r_{ij} = C \, . \end{cases}$$

- Здесь $A \subseteq \{1, \ldots, k\}$ – множество индексов элементов последней строки, которые требуется скорректировать.

Процедура коррекции

- Эта система может быть решена методом итераций Ньютона с начальным приближением $\mathbf{x}_0$ для $\mathbf{x}$ и 0 для λ.
- В соответствии со смыслом решаемой задачи, мы ожидаем, что решение сойдётся к ближайшему из экстремумов.

Пример

- В качестве примера рассмотрим коррекцию модельной матрицы 3х3 этим методом.

$$S(3,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & -0.9 \\ 0.5 & -0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 0.75$$

$$S_3 = -0.76$$

Пример

- Второй главный минор этой матрицы положителен и равен 0.75.
- Скорректируем третью строку и столбец так, чтобы значение детерминанта скорректированной матрицы было равно 0.1.
- Вычислим обратную матрицу для S_2 .

$$S(2,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Пример

- Система уравнений для коррекции x_1 и x_2:

$$\begin{cases} \lambda(\frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2) = 0.5 - x_1 \\ \lambda(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2) = -0.9 - x_2 \\ \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{4}{3}x_2^2 = 1 - \frac{0.1}{0.75}. \end{cases}$$

- Её корни следующие: $x_1 = 0.285487, x_2 = -0.624637$
- Подставляя значения в исходную матрицу, получаем, что определитель матрицы равен 0.1, а Евклидово расстояние между полученной и исходной матрицами равно 0.349057.

Пример

- Система уравнений для коррекции только x_1:

$$\begin{cases} \lambda(\frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}\cdot(-0.9)) = 0.5 - x_1 \\ \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{4}{3}x_1\cdot(-0.9) + \frac{4}{3}(-0.9)^2 = \dfrac{13}{15}. \end{cases}$$

- Её корень $x_1 = -0.243845$
- Подставляя значения в исходную матрицу, получаем, что определитель матрицы равен 0.1, а Евклидово расстояние между полученной и исходной матрицами равно 0.743845.

Пример

- Система уравнений для коррекции только x_2:

$$\begin{cases} \lambda\left(-\frac{2}{3}\cdot 0.5+\frac{4}{3}x_2\right)=-0.9-x_2 \\ \frac{4}{3}\cdot 0.5^2-\frac{4}{3}\cdot 0.5x_2+\frac{4}{3}x_2^2=\dfrac{13}{15}. \end{cases}$$

- Её корень $x_2=-0.430074$
- Подставляя значения в исходную матрицу, получаем, что определитель матрицы равен 0.1, а Евклидово расстояние между полученной и исходной матрицами равно 0.469926.

Эксперименты

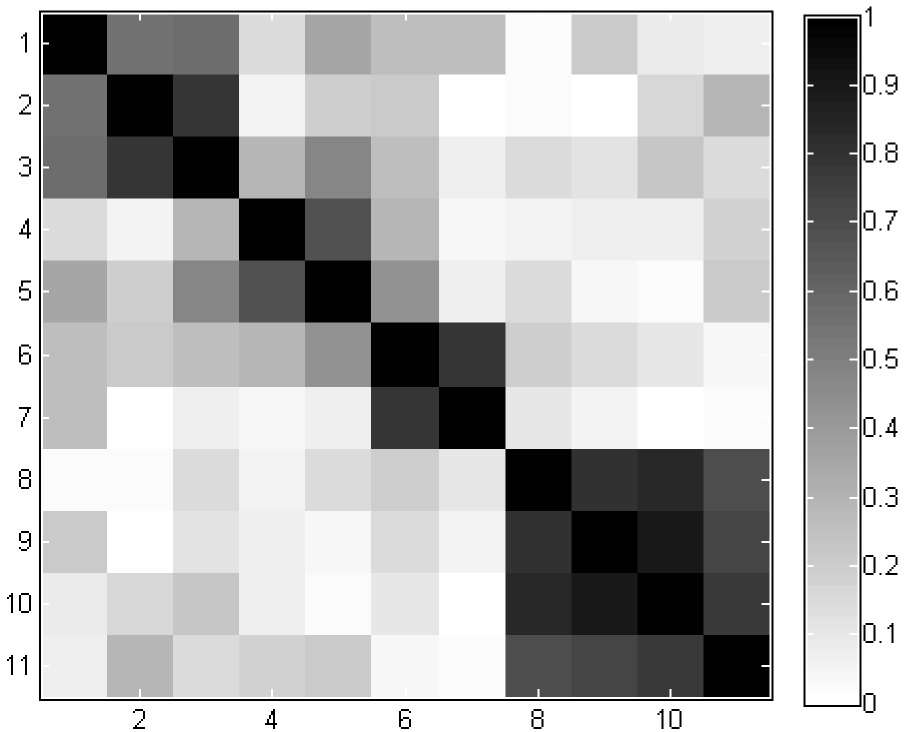
- Рассмотрим эксперименты по коррекции матриц парных сравнений на реальных данных.
- Скорректируем три матрицы парных сравнений. Будем производить поиск оптимальной перестановки и править последнюю строку и столбец отрицательного минора целиком, чтобы получить матрицу, суммарное отклонение от исходной которой будет минимальным.

Эксперименты

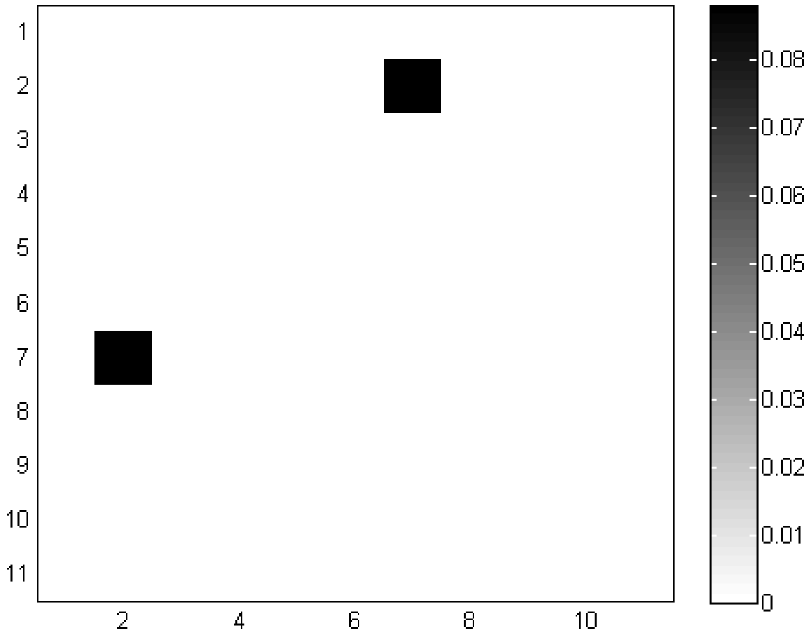
- Будем сравнивать результат коррекции с результатом, полученным при использовании метода, предложенного на **ММРО-2013**.
- Отличие этого метода от предложенного в способе коррекции отрицательного минора.
- Сперва ищется возможность коррекции одиночного элемента. Если такая возможность существует, то элемент корректируется. Если нет, то корректируется вся строка и столбец целиком методом половинного деления.

1. ЭЭГ биоритмов головного мозга (11x11)

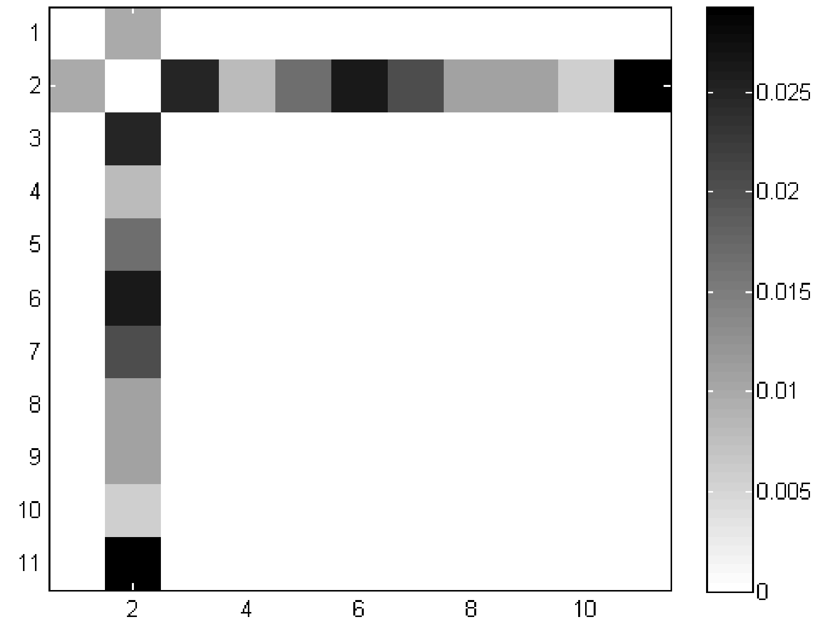
- Корреляционная матрица статистических взаимосвязей между энергетическими свойствами биоритмов головного мозга для 11 частот навязанных ритмов (Небылицын В.Д., 1966 г.)



1. ЭЭГ биоритмов головного мозга (11x11)



Отклонение матрицы, скорректированной ранее предложенным методом, равно 0.087995

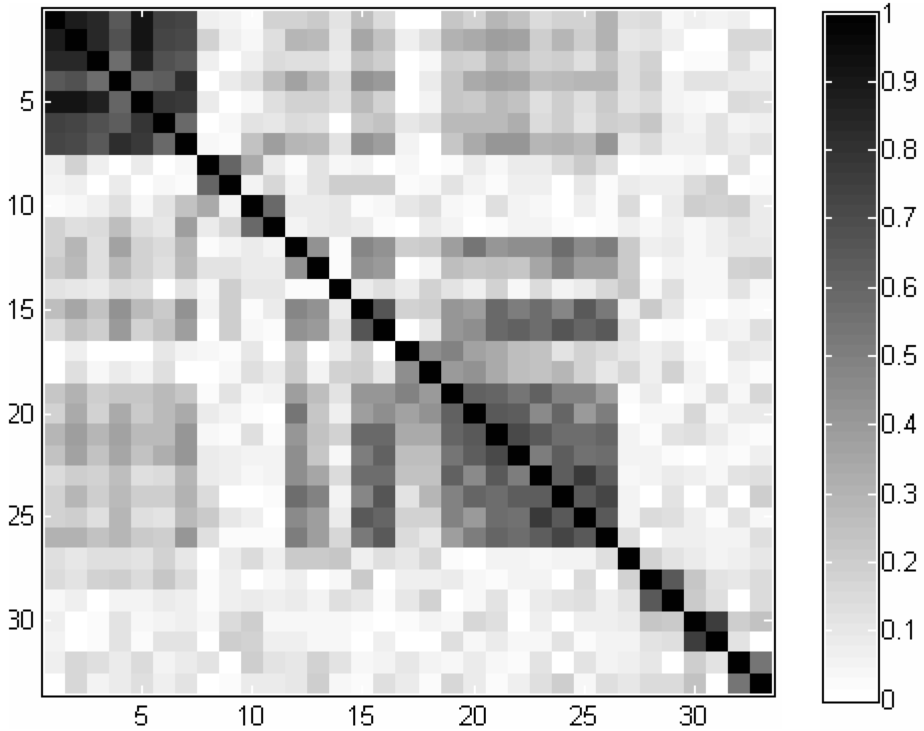


Отклонение матрицы, скорректированной описанным методом, равно 0.057427

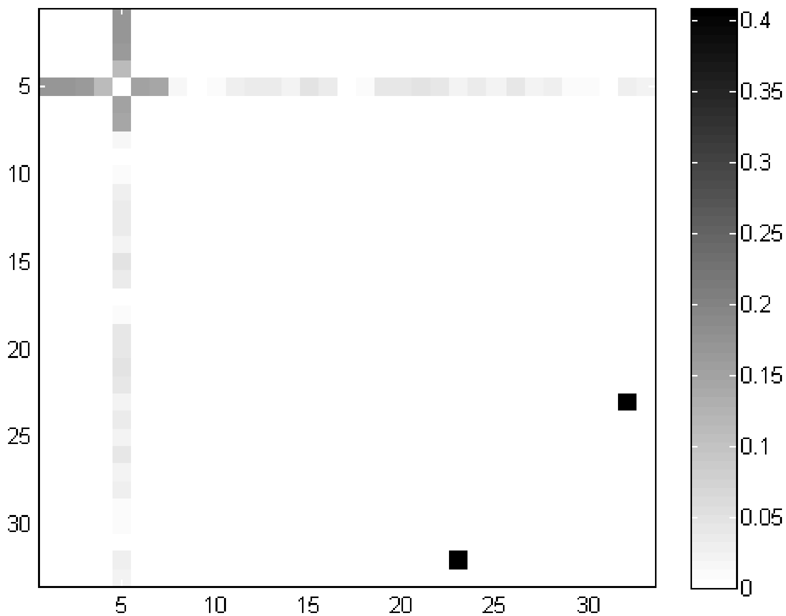
2. Физиологические параметры (33x33)

- Корреляционная матрица статистических взаимосвязей 33 физиологических параметров, описывающих состояние человека.
- Исследование влияния шумов и вибрации в кабине трактора на работоспособность и самочувствие

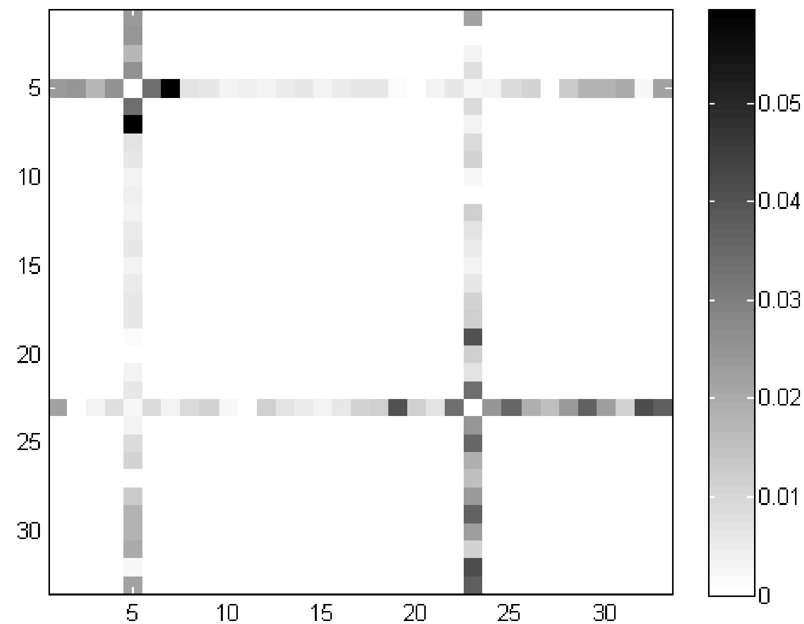
(Лумельский В.Я., 1970 г.)



2. Физиологические параметры (33x33)



Отклонение матрицы, скорректированной ранее предложенным методом, равно 0.575373

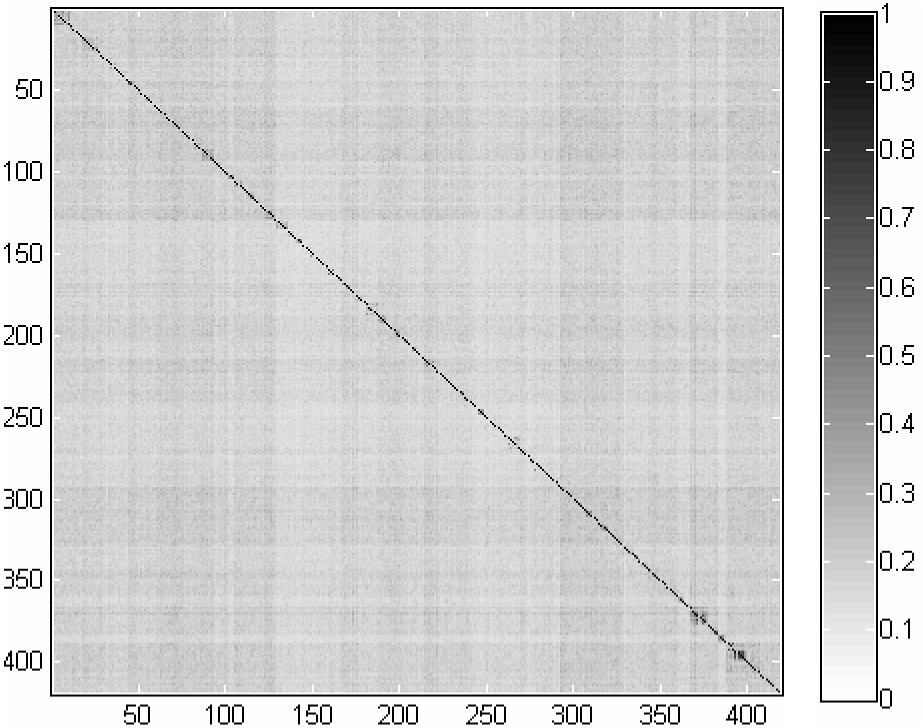


Отклонение матрицы, скорректированной описанным методом, равно 0.146745

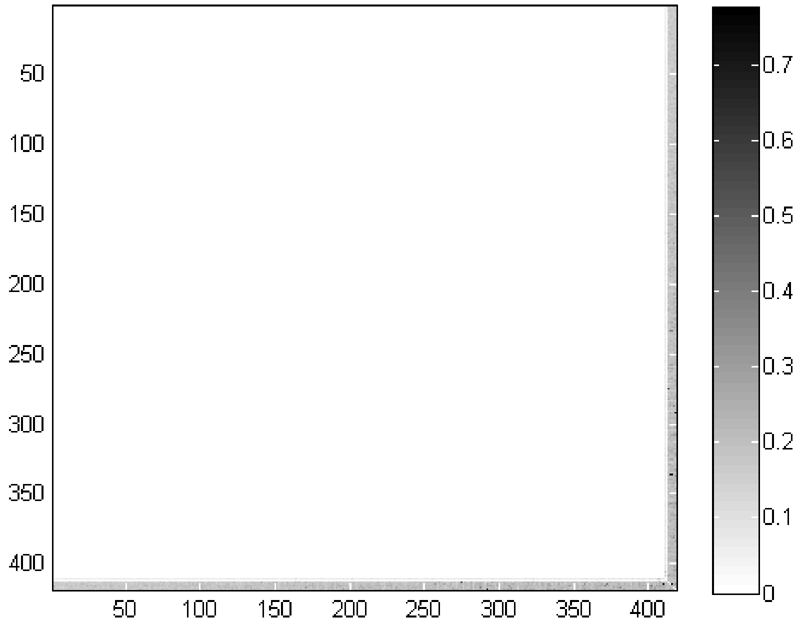
3. Белковые последовательности (418x418)

- Матрица нормированных близостей 418 белковых последователь-ностей

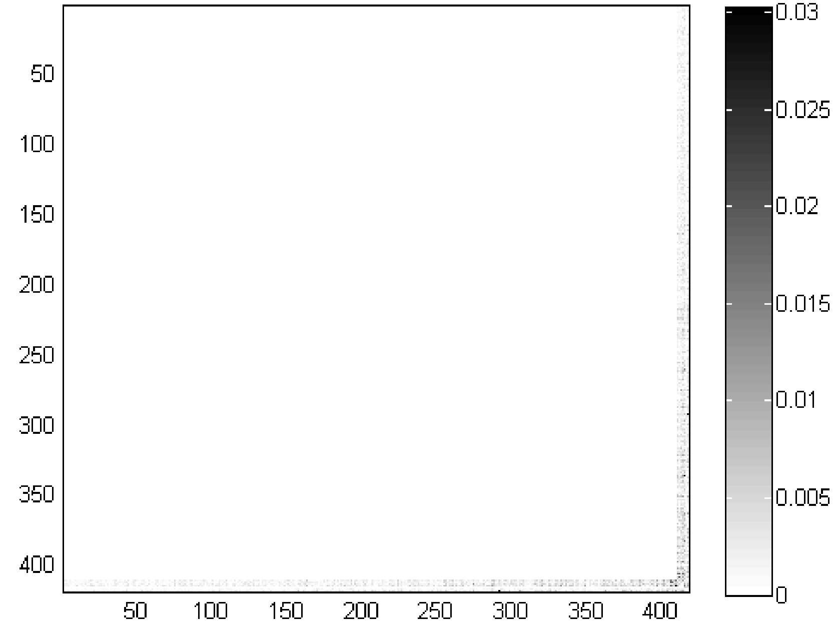
(S.-H. Kim, 1999 г.)



3. Белковые последовательности (418x418)



Отклонение матрицы, скорректированной ранее предложенным методом, равно 10.108641



Отклонение матрицы, скорректированной описанным методом, равно 0.162549

Выводы

- В сравнении с ранее имевшимся методом коррекции миноров предложенный метод позволяет получить минимально отличающуюся скорректированную матрицу.
- В предложенном методе коррекции матриц парных сравнений сохраняется их размер и, в отличие от метода разложения по Карунену-Лоэву, сохраняется ранг матрицы.

Выводы

- Детерминант скорректированной матрицы парных сравнений всегда остается положительным. Его значение можно задать заранее, регулируя степень коррекции элементов матрицы.
- Чем меньше число скорректированных элементов в матрице парных сравнений, тем сильнее их отклонения от исходных значений. Поэтому не всегда удается скорректировать только одиночные элементы.

Выводы

- В общем случае можно корректировать не все, а только некоторые парные сравнения объектов, вносящих метрические искажения. Это дает возможность выбирать, какие именно парные сравнения следует скорректировать.

Спасибо за внимание!